El conocimiento didáctico del profesor de matemáticas

El conocimiento didáctico del profesor de matemáticas

Una experiencia con la Geometría de Descartes

Jhon Helver Bello Chávez
Alberto Forero Poveda

COLECCIÓN
didáctica

Primera edición, marzo de 2016
ISBN: 978-958-8897-89-9

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Dirección Sección de Publicaciones
Rubén Eliécer Carvajalino C.

Coordinación editorial
Miguel Fernando Niño Roa

Corrección de estilo
Irina Florián Ortiz

Diagramación
Juanita Giraldo

UD Editorial

COLECCIÓN didáctica

Editorial UD
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Carrera 24 No. 34-37
Teléfono: 3239300 ext. 6202
Correo electrónico: publicaciones@udistrital.edu.co

Bello Chávez, Jhon Helver
El conocimiento didáctico del profesor de matemáticas : una experiencia con la geometría de Descartes / Jhon Helver Bello Chávez, Alberto Forero Poveda.- - Bogotá : Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2016.
124 páginas ; 24 cm.
ISBN 978-958-8897-89-9
1. Geometría - Enseñanza - Metodología 2. Formación profesional de maestros de matemáticas 3. Capacitación docentes en matemáticas - Metodología I. Forero Poveda, Alberto, autor
II. Tít.
516 cd 21 ed.
A1518536

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Contenido

Índice de tablas

Índice de Figuras

Introducción

Este documento presenta los planteamientos de una investigación sobre el trabajo que se puede realizar con estudiantes, futuros profesores de matemáticas, a partir del análisis de una obra histórica, en este caso la *Geometría* de René Descartes. En el interior, se encuentran los planteamientos teóricos que hacen pensar la historia como un elemento importante para la formación del profesor de matemáticas, en especial, respecto al conocimiento matemático de referencia, que permite que el estudiante, futuro profesor de matemáticas, reflexione sobre aspectos ontológicos y epistemológicos del conocimiento matemático.

En este sentido, el documento no es una reflexión histórica ni pretende encontrar aspectos no conocidos alrededor de la obra, más bien hace uso del conocimiento que los historiadores en matemáticas han construido sobre ella, para elaborar un análisis de contenido descriptivo que permita puntualizar aspectos aprovechables para la formación de profesores en esta área de conocimiento.

Se pretende mostrar, a partir de un ejercicio académico, la importancia de pensar la historia de las matemáticas como el nicho de prácticas matemáticas donde emergieron aspectos relacionados con el saber de esta ciencia; de esta manera, se analiza la práctica matemática desde seis actividades:

- Descubrimiento.
- Explicación (subjetiva y objetiva).
- Formulación.
- Aplicación.
- Justificación. Prueba de teoremas. Definiciones y axiomas.
- Representación. Sistemas de símbolos y sistemas de diagramas.

No se pretende hacer entender que la única manera de trabajo histórico para la formación del futuro profesor de matemáticas sea el desarrollo literal de acontecimientos históricos, tal como se trabajaron cuando fueron descubiertos; lo que se asume es que alrededor de la historia de las matemáticas se encuentran aspectos que fortalecen el conocimiento especializado que debe desarrollar quien desee ejercer la profesión de ser profesor. Indudablemente, es posible que una forma de hacerlo sea con problemas que permitan reconocer y comprender prácticas matemáticas trabajadas en diversos acontecimientos históricos.

El documento muestra, a partir de la obra de Descartes, dos aspectos diferenciados, pero complementarios: el saber histórico necesario para el formador del futuro profesor de matemáticas y las posibilidades de trabajo con un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM), alrededor de las componentes *specialized content knowledge* (SCK) y *common content knowledge* (CCK) propuestas por Ball, Thames y Phelps (2008) para el conocimiento didáctico de contenido.

Este ejemplo se realizó en dos cursos de la Licenciatura: Problemas del Álgebra Geométrica y Didáctica del Álgebra; en el primero, a partir de la resolución del problema de dividir el volumen de una esfera en una razón dada, se analiza el tipo de resolución del problema y los medios que utilizan los estudiantes para justificar la solución planteada. Este problema es arquimediano, pero no fue escogido por ser histórico, sino porque su tratamiento implica la formulación y el análisis de diferentes actividades asociadas a prácticas matemáticas que pueden ser análogas a las formalizadas en el texto histórico *Geometría* de Descartes.

En el curso de Didáctica, desde la visión de la práctica de reflexión (Arboleda Aparicio, 2012) por parte del profesor (hasta de su propia formación), se analizan los objetos matemáticos que se usan y emergen en la práctica matemática que realizaron en el curso de Problemas, los cuales se comparan con aspectos del libro dos de Euclides.

En general, este escrito es un inicio en este tipo de reflexiones; por tanto, quedan abiertas varias preguntas en relación con la formación de profesores y las posibilidades desde la filosofía de las prácticas matemáticas de desarrollo de la dupla Educación Matemática-historia de las matemáticas.

El documento está repartido en seis capítulos: el primero plantea los cuestionamientos y las motivaciones para llevar a cabo este estudio; el segundo describe los referentes teóricos desde donde posibilitamos hablar de la relación historia de las matemáticas-formación de profesores; el tercer capítulo muestra el análisis de contenido descriptivo de la obra *Geometría* de Descartes, que se realizó para conocer y determinar las actividades de las prácticas matemáticas asociadas a los diferentes trabajos construidos en el libro. El siguiente capítulo, a partir del análisis desarrollado sobre la obra de Descartes en el capítulo anterior, enfatiza en los asuntos a trabajar con los estudiantes; el quinto capítulo describe y analiza la experiencia llevada a cabo con los estudiantes para profesor de matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas en dos cursos: Problemas del Álgebra Geométrica y Didáctica del Álgebra; finalmente, en el último capítulo se hace una reflexión sobre la importancia de la historia de las matemáticas en la formación de profesores de matemáticas y se proponen algunos aspectos que pueden profundizarse en estudios posteriores.

Capítulo I. Motivaciones del estudio

Para efectos del desarrollo de las razones que hacen pertinente y necesario el planteamiento y la gestión de esta experiencia investigativa, subdividiremos este apartado en dos espacios: el primero hace referencia al campo de investigación que relaciona la historia de la matemática con la formación de profesores de matemática. El segundo justifica la elección de la obra histórica *Geometría,* publicada en 1637 por René Descartes, para esta investigación.

El conocimiento del profesor de matemáticas

Hace más de dos décadas que las componentes del conocimiento del profesor se plantean como objeto de estudio en la comunidad científica que trabaja en el campo de la educación; en especial en Educación Matemática existen diferentes experiencias de investigación que hacen referencia a ello. Al revisar la literatura especializada reportada en el *Third International Handbook Education Mathematics* (Clemens, Bishop, Keitel, Kilpatrick y Leung, 2013), se evidencia que desde la investigación, este aspecto del conocimiento del profesor de matemáticas es abordado desde diversos campos: como la visión social, política y cultural de la Educación Matemática (Janblonka, Wagner y Walshaw, 2013); las políticas de evaluación de estudiantes (Trouche, Drijvers, Gueudet y Sacristán, 2013); hasta la revisión de libros de texto especializados; análisis de videos de clases o la interacción con la tecnología (Leung, 2013).

De igual manera, el éxito o fracaso de los estudiantes en pruebas internacionales es relacionado con la formación que tienen los profesores; en este sentido, el trabajo propuesto por Blomeke, Feng, Kaiser y Schmidt (2014) muestra la importancia del desarrollo de estudios que permitan actuar sobre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido de los profesores, pues los países con mejor desempeño en las pruebas internacionales para estudiantes tienen los profesores con mejor desempeño alrededor de estos dos tipos de conocimientos.

Es evidente, después de revisar este documento, que esta problemática es común a los diferentes ámbitos de la Educación Matemática, y seguirá siendo abordada. Por ejemplo, Zaslavsky y Sullivan (2011) muestran la evolución de la problemática de la formación de profesores desde diferentes tareas y conocimientos que los investigadores han desarrollado específicamente para esta formación, y reconocen que las prácticas de los estudiantes que serán profesores de matemáticas deben cambiar y, de alguna manera, ejemplifican modelos desde los cuales es posible aprender matemáticas.

Una revisión de las tendencias de investigación que se desarrollan alrededor de esta problemática en la década comprendida entre 1999 y 2009 es la realizada por Sánchez (2011), quien —después de revisar las siguientes fuentes de información: investigaciones internacionales más consultadas; libros especializados en el tema; trabajos publicados en actas de congresos internacionales, en especial el ICME y PME; artículos de las revistas *Educational Studies in Mathematics* (ESM) y *Journal of Mathematics Teacher Education* (JMTE)— reconoce dos tendencias para abordar esta problemática: la relacionada con la reflexión de la práctica del profesor y la que se basa en presupuestos teóricos.

Respecto a la segunda tendencia, Sánchez (2011) afirma que se reconocen las categorías propuestas por Lee Shulman como motivadoras de una discusión actual en el campo de la formación del profesorado de matemáticas, en especial las que hacen referencia a cuestiones sobre el conocimiento didáctico y matemático del profesor. Este autor, en 1986, llamó la atención sobre el tipo de comprensiones que tienen los profesores de la materia, la pedagogía y las formas como relacionaban estos conocimientos con su quehacer como docentes.

Su primera caracterización del conocimiento del profesor involucró (Gess-Newsome, 2002) el tema, lo pedagógico y lo curricular, algunos refinamientos a las características de estos; permitió definir siete categorías respecto al conocimiento del profesor: conocimiento de la materia, pedagógico general, curricular, de los alumnos, de los contextos educativos, fines y valores educativos y conocimiento didáctico del contenido. Este documento versa sobre este último conocimiento, que, según Marcelo, "es una amalgama de contenido y didáctica" (citado en Bolívar, 2005). Aspecto que permite cuestionar el tipo de conocimiento tanto de la materia como de la didáctica específica que tiene el profesor y, de igual manera, permite encontrar enlaces en la práctica y teoría de uno respecto al otro.

De manera más específica, autores como Ball, Thames y Phelps (2008) hacen referencia a cuatro subcategorías del conocimiento didáctico del contenido: 1) el conocimiento de los contenidos comunes (CCK), es decir, el manejo del conocimiento matemático que se puede poner en juego con estudiantes, pero que es común a otro tipo de profesiones, no es exclusivo de la ni para la enseñanza; 2) el conocimiento de contenido especializado (SCK), que es el conocimiento matemático y habilidad necesaria de forma única por los profesores en la realización de su trabajo, conocimiento que los especializa para la enseñanza; 3) el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS), relacionado con la predicción y la interpretación de los procesos de los estudiantes cuando se les entrega una tarea, y 4) el conocimiento de los contenidos y la enseñanza (KCT), que relaciona acciones del profesor destinadas a la instrucción, organización del proceso de enseñanza. Específicamente, este proyecto de investigación indaga sobre la formación de un grupo de estudiantes para profesor respecto a CCK y SCK.

La historia de la matemática en la formación de profesores

Es un hecho que la relación entre la Educación Matemática e historia de la matemática existe desde las reflexiones iniciales sobre la primera disciplina. Existen registros de esta; desde hace más de un siglo, Félix Klein (primer presidente de ICMI, de 1908 a 1920) diagnosticó y trabajó en relación con las posibilidades y potencialidades de la historia de la matemática en los aspectos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. De igual manera, consideraba el conocimiento histórico como parte fundamental de lo que debía aprender y reflexionar un profesor de matemáticas.

El estudio realizado por Fauvel y Maanen (2002) muestra que en el siglo pasado diferentes perspectivas teóricas le dieron vida a esta relación, la cual aparece relacionada en la visión antropológica y en la perspectiva sociocultural, generadas en el desarrollo de la Educación Matemática. En lo que respecta a la formación de profesores, este estudio muestra que en diferentes países, entre ellos Brasil, China, Italia, Francia, Alemania, Austria, entre otros, la incorporación de aspectos relacionados con historia de la matemática se da, en su mayoría, a través de cursos sobre el tema. Sin embargo, informes como el realizado por Schubring (2002) muestran en diferentes países de Asia y Europa diversas experiencias que incluyen tópicos de historia de la matemática en la formación de profesores, lo que permite concluir que la relación historia de la matemática-formación de profesores tiene tradición como tópico de discusión dentro de la comunidad internacional, pero no son completamente claras las intenciones de este tipo de formación para los docentes de matemática.

Al respecto, los artículos internacionales que reportan experiencias respecto al uso de la historia de la matemática en la formación de profesores (Guacaneme, 2010) lo hacen para:

- Transformar su visión del conocimiento matemático y de las matemáticas, y aportan al conocimiento disciplinar del profesor de matemáticas.
- Cualificar y mejorar sus conocimientos y actitudes para la enseñanza de las matemáticas, y aportan al conocimiento pedagógico del contenido del profesor.
- Ofrecer a los profesores recursos y una manera alternativa de enseñar matemáticas y, de esta forma, fortalecer el conocimiento pedagógico del contenido.

- Fortalecer la valoración y el papel de la profesión docente.
- Cumplir con requisitos evaluativos.

Sin embargo, en el desarrollo de esta relación, se sitúan algunos asuntos que no están totalmente abordados:

> […] hacen falta estudios que clarifiquen la relación respecto al tipo de conocimiento disciplinar que se construye; sobre el tipo de historia que favorece el conocimiento del profesor de matemáticas; es más, hace falta un proceso de transposición didáctica que reescriba la historia para ser utilizada en la formación de profesores de matemáticas. (Guacaneme, 2010 p. 2)

En este sentido, e intentando recopilar las razones expuestas para dar uso a la historia de la matemática en diferentes reportes de investigación, Guacaneme afirma que

> En conjunto, tales argumentos ofrecen un panorama en el que se reconoce una perspectiva prescriptiva de la HM como fuente de artefactos,[1] de diferente orden, que favorecen el conocimiento del profesor de matemáticas o que pueden ser usados en el ejercicio docente. (2011, p. 4)

Dichos artefactos son clasificados por este autor en tres categorías: visiones de la actividad matemática; visiones de los objetos matemáticos y competencias profesionales. En cada una de ellas se concibe de manera diferente el tipo de conocimiento histórico que se pone en juego, su uso y el tipo de conocimiento teórico y práctico que se podría favorecer en el profesor.

Nuestro país no ha sido ajeno a estas reflexiones y problemática y, al igual que en el resto del mundo, en los programas de formación de profesores, se mantiene la tendencia de espacios académicos que reflexionan sobre este conocimiento, aunque con las mismas dificultades que antes se presentaban; no queda claro cuáles son sus intenciones. De acuerdo con el informe de investigación de Torres y Guacaneme (2012), en las trasformaciones que en los últimos años sufrieron los programas de formación de profesores no se aclara la participación de este conocimiento en la formación, pero al indagar a estudiantes y profesores involucrados en estos procesos de formación, todos los actores reconocen cierta importancia al trabajo en historia de la matemática, que también puede ser clasificado a partir de los artefactos anteriormente nombrados.

De esta manera, la relación entre formación de profesores de matemáticas e historia de las matemáticas es un campo abierto en Educación Matemática. En esencia y al respecto, este documento pretende mostrar una experiencia de análisis de una obra histórica, una propuesta para dos espacios académicos de futuros profesores de matemáticas, y procura aportar en cuanto a la relación historia de las matemáticas-formación de profesores.

1 En el sentido planteado por Verillon y Rabardel (1995), un *artefacto* llega a ser una *herramienta* cuando los usuarios son capaces de emplearlo para sus propios propósitos.

Un espacio para pensar en la formación del profesor. La Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Como parte de las reflexiones e investigaciones que realizó un grupo de profesores de la Universidad a finales de la década de 1990 e inicios de este siglo, que en ese momento pertenecían a la Licenciatura en Matemáticas, después de un serio y argüido debate, se dio inicio a un programa curricular pensado para la formación de profesores en el área, denominado Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM). Este nuevo espacio académico pretende ser un proyecto de investigación sobre la formación de profesores de matemáticas a partir de las siguientes posiciones:

> 1. El convencimiento de que el saber profesional del profesor debe discutir sobre la naturaleza de lo que enseña, del para qué enseña, a la vez de qué se aprende, para qué se aprende y del por qué se aprende. Lo que constituye tratar de explicitar las concepciones previas de los alumnos y de los profesores para luego transformarlas.
>
> 2. La crítica al modelo de currículo (asignatura, estructurado sobre la linealidad de la matemática y desvertebrado), el cual representa, para nosotros otro obstáculo para abordar un tipo de enseñanza que promueva el aprender autónomo basado en la resolución de problemas.
>
> 3. La aceptación de la perspectiva constructivista y de las matemáticas como actividad humana imponen para nosotros modelos de actuación profesoral diferentes a los tradicionales, y entonces se requiere la investigación como una posibilidad de lograr conocimiento sobre lo que hacemos y lo que debemos hacer. (Universidad Distrital Francico José de Caldas, 2000, p. 7)

Como se puede evidenciar, los principios de LEBEM incluyen una idea diferente a la tradicional sobre la matemática y, sobre todo, una perspectiva novedosa de la formación de profesores. Es evidente que la operatividad, la metodología y el desarrollo de estos propósitos implican una nueva formulación curricular en donde los problemas del profesor, su conocimiento y práctica sean objeto de estudio tanto de los estudiantes para ser profesores como de los formadores.

De esta manera, asumir el proyecto curricular como un proyecto de investigación tiene como eje central dar respuesta a la pregunta:

> [...] ¿qué formación debe tener un profesor de jóvenes y niños, que pretende ayudarles a ingresar (o profundizar) en el ámbito del trabajo académico y particularmente en el de la matematización constructora de mundo, y lo pretende hacer sin ejercer segregación ni otras formas de violencia? (Universidad Distrital Fancisco José de Caldas, 2000, p. 26)

Este proyecto ha trabajado durante las últimas décadas alrededor de este propósito; para ello, ha declarado una forma de trabajo para conseguir los objetivos y la resolución de problemas. En LEBEM, los espacios académicos son gestionados a partir de las ideas propuestas por Charnay, y como se afirma en Universidad Distrital Francisco José de Caldas, para el proyecto, existen dos tipos de objetivos alrededor de estos planteamientos:

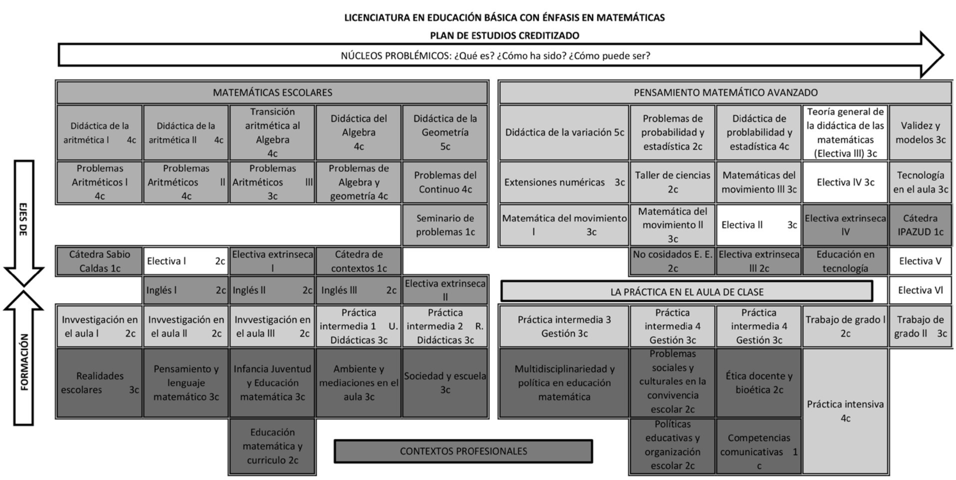
1. Metodológico: aprender a resolver problemas, a investigar, a comunicar, a argumentar, a aceptar las críticas y otros puntos de vista. Se logra en la actividad misma.

2. Cognitivo: se apunta a la reconceptualización de los conocimientos presentes, o hacia la construcción de un nuevo conocimiento a través de la actividad de la resolución de problemas. (2000, p. 21)

Esta apuesta de proyecto de investigación curricular, que se orienta y se hace realidad en las aulas de clase a partir de la resolución de problemas, deja claro que los formadores de profesores de matemáticas tenemos un campo de desarrollo profesional en la investigación del cómo, por qué, para qué y con qué es posible formar un ser humano como un profesional de la Educación Matemática.

Curricularmente, el proyecto se organiza a partir de cuatro ejes de conocimiento para el profesor de matemáticas: didáctica, problemas, contextos y práctica. Este último es el eje integrador de los demás, pues se considera que se aprende a ser profesor en el ejercicio diario del hacer. Finalmente, la malla curricular del proyecto se proyecta de la siguiente manera (figura 1).

Figura 1. Plan de estudios por créditos Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas



Fuente: Universidad Distrital Francisco José de Caldas (2000, p. 25).

Para efectos de esta indagación, nos vamos a centrar en los espacios académicos de Problemas del Álgebra Geométrica y Didáctica del Álgebra, los cuales son propuestos para el cuarto semestre y se encuentran adscritos al núcleo problémico de matemáticas escolares. El espacio de problemas tiene como objetivo ampliar el espectro en los estudiantes que se forman para ser profesores de matemáticas, respecto a las diversas manifestaciones que refiere el término *álgebra* como rama de las matemáticas que tiene relación con la geometría, y también, por ejemplo, con áreas como la aritmética, la lógica y el análisis. El centro del curso no solo se encuentra en la construcción de temáticas, sino principalmente en el análisis y la reflexión que se pueden realizar sobre situaciones en donde intervengan las relaciones entre la geometría y el álgebra, a partir del uso y manejo de diversas representaciones que potencien el desarrollo conceptual de los estudiantes en el álgebra geométrica.

El curso de Didáctica pretende que los estudiantes se apropien de un discurso que les permita analizar aspectos fundamentales en la construcción de pensamiento algebraico y, desde ahí, analizar los procesos y las rutas que se proponen en la escuela. Algunos aspectos como, por ejemplo, las interpretaciones de la letra, el proceso de construcción de la simbolización en el desarrollo de taxonomías de objetos matemáticos, el papel y desarrollo de la solución de ecuaciones y el papel del desarrollo de la representación de curvas en el proceso algebraico de las matemáticas son temas abordados durante el desarrollo del espacio académico.

La obra matemática de Descartes. Un buen ejemplo para este estudio

Para realizar este trabajo de investigación y dar inicio a las reflexiones que pretendemos dar sobre el papel de la historia de la matemática en el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas y con el ánimo de estudiar esta relación alrededor de un grupo de estudiantes, fue necesario acotar la temática que abordamos durante el desarrollo; en este sentido, se escogió la obra *Geometría* de Descartes, publicada en 1637. Las razones que nos llevaron a interesarnos en este texto se pueden resumir en dos:

Primero, el conocimiento matemático expuesto en la obra: según algunos historiadores de la matemática (Boyer, Pastor, Collette, Kline), esta obra pasa a la historia por contener los principios de la geometría analítica, elementos que entregaban a la humanidad otra forma de trabajo de los problemas geométricos, diferente al sintético, expuesto por Euclides. En ella, se encuentran aspectos relacionados con el análisis de curvas, una solución al problema clásico de la trisección del ángulo, al problema de Pappus y una taxonomía de curvas a partir del análisis de representaciones simbólicas asociadas a problemas geométricos:

> Hay una gran unanimidad en considerar a la Geometría de Descartes como una de las obras más importantes en la historia del pensamiento matemático. Al utilizar el Álgebra simbólica como herramienta algorítmica básica, Descartes realiza una nueva

> lectura de la Geometría griega, que supera sus limitaciones y rebasa sus conquistas geométricas. A base de elaborar una excelente herramienta para enfrentar y resolver problemas geométricos antiguos y modernos, Descartes libera a la Geometría de la dependencia a la estructura geométrica de las figuras e introduce una forma de solución de los problemas basada en la aplicación del Análisis mediante la intervención del Álgebra. (González Urbaneja, 2004, p. 3)

De esta manera, estudios históricos respecto al desarrollo del álgebra (Van der Waerden, 1985; Bashmakova y Smirnova, 2000; Tabak, 2004) desarrollan los aspectos fundamentales de la obra de Descartes; sin embargo, estos son generales y un poco anecdóticos, no puntualizan respecto al tipo de problemas que trata la obra ni desarrollan en su totalidad el análisis de la *Geometría*. A pesar de lo anterior, estos libros hablan de la importancia que la obra tuvo en el desarrollo de la teoría de resolución de ecuaciones, la representación simbólica y la geometría analítica.

Quizás los trabajos que desde el punto de vista histórico y epistemológico desarrollan de manera más completa el trabajo matemático de Descartes son los de Bos (1981, 1988, 2001); en estos documentos, se trabaja la estructura de la *Geometría* y su importancia epistemológica a partir de la noción de construcción y exactitud. Para ello, el autor recorre el documento y lo relaciona con los métodos de solución de problemas geométricos griegos, los trabajos geométricos de Clavius, algebraicos de Vieta, y posiciona a la *Geometría* como un documento trascendental en el entendimiento de las tempranas matemáticas modernas.

En especial, Bos nos permite considerar que la obra matemática de Descartes tiene en su interior aspectos importantes para la formación del profesor de matemáticas, en el sentido en que se postula como importante no solo en la formulación de los principios de un área como la geometría analítica, sino también en la construcción de la concepción de aspectos íntimos de la disciplina matemática y en el análisis y la reflexión sobre los cambios epistemológicos y representacionales en la geometría a partir del álgebra. Sin embargo, el estudio que plantea Bos (1981) sigue mirando la estructura del documento de manera lineal, por libros, asunto que creemos puede romperse a través de factores que se conoce que trabaja, por ejemplo, el análisis de curvas o la relación entre la representación algebraica y la representación gráfica o geométrica. La tabla 1 muestra la estructura de la obra según Bos.

Tabla 1. Estructura propuesta por Bos

	Book I: Plane problems	*Géométrie* pp:	*Oeuvres* vol. 6 pp:
I-A	Geometrical interpretation of the operations of arithmetic	297–300	369–372
I-B	Problems, equations, construction of plane problems	300–304	372–376
I-C	Pappus' problem; deriving the equation, cases in which the problem is plane	304–315	377–387
	Book II: Acceptability of curves		
II-A	Acceptable curves, their classification	315–323	388–396
II-B	Pappus' problem continued, solution of the three- and four-line problem, plane and solid loci, simplest case of the five-line locus	323–339	396–411
II-C	Acceptability of pointwise construction of curves and construction by strings	339–341	411–412
II-D	Equations of curves, their use in finding normals	341–352	412–424
II-E	Ovals for optics	352–368	424–440
II-F	Curves on non-plane surfaces	368–369	440–441
	Book III: Simplicity of curves and of constructions		
III-A	Acceptability of curves in constructions, simplicity	369–371	442–444
III-B	Equations and their roots	371–380	444–454
III-C	Reduction of equations	380–389	454–464
III-D	Construction of the roots of third- and fourth-degree equations, solid problems	389–402	464–476
III-E	Construction of the roots of fifth- and sixth-degree equations, "supersolid" problems	402–413	476–485

Fuente: Bos (2001, p. 291).

Segundo, el poco interés que muestran los textos y artículos relacionados con didáctica del álgebra que hacen uso o referencia a aspectos históricos de esta temática: al revisar documentos que abordan como parte de sus marcos teóricos reflexiones históricas (Malisani, 2003; Sessa, 2005; Filloy, Puig y Rojano, 2008) y que son referentes en la comunidad hispana que trabaja en didáctica del álgebra, la obra de Descartes aparece de manera sucinta, se nombra, pero no hay un análisis detallado que permita utilizarla de manera didáctica; por ejemplo, sí sucede con el trabajo que relaciona al libro II de los *Elementos* de Euclides. Al respecto, en Sessa se hacen las siguientes afirmaciones sobre el trabajo de Descartes:

> [...] lleva adelante un proyecto esencialmente nuevo: resolver problemas geométricos a través de la herramienta algebraica. La estrategia que propone es la de representar los objetos geométricos a través de objetos numéricos: los puntos se identifican con pares de números y las rectas con conjuntos de pares que verifican una cierta ecuación… El principio de homogeneidad, presente en el trabajo en matemáticas por más de veinte siglos, pierde vigencia con este tratamiento. (2005, p. 61)

Aunque la referencia muestra el establecimiento de un cambio epistemológico en relación con la representación de los objetos matemáticos, la propuesta didáctica realizada por Sessa (2005) en relación con este aspecto carece de uso. Los asuntos que se reconocen en la obra de Descartes quedan nombrados, pero sin uso en el desarrollo de propuestas; pareciera que la ruptura de la homogeneidad y la identificación de puntos como pares estuviera separada del desarrollo del álgebra, aspectos que los historiadores no reconocen, pues se considera la obra de Descartes fundamental en el desarrollo de las matemáticas modernas iniciales y, por tanto, es comprendido como uno de los fundadores del álgebra. En sus obras, autores como Bos (2001), Bashmakova y Smirnova (2000), Van der Waerden (1985) dedican capítulos o libros completos al análisis y el desarrollo de la obra matemática de Descartes y su relación con el álgebra.

Así como los dos aspectos anteriores, no se evidencia trabajo didáctico relacionado con la importancia epistemológica de los siguientes aspectos: la solución dada por Descartes al problema de Pappus, el cambio en la noción de curva, la noción de construcción matemática, de exactitud, las nociones de rigor y validez en matemáticas.

Al parecer, y de acuerdo con las indagaciones realizadas, existe mucha distancia y, de alguna manera, una falta de uso de las indagaciones históricas, realizadas por los historiadores de la matemática respecto al trabajo matemático de Descartes y las reflexiones epistemológicas que realizan los investigadores en Educación Matemática respecto al álgebra. Sin embargo, parece apenas natural creer que este tipo de conocimiento, el desarrollado por Descartes en la *Geometría*, debe hacer parte de las discusiones de los futuros profesores de matemáticas, así como sucede con los trabajos de Euclides o las reflexiones sobre los indivisibles e infinitesimales. Por esas razones vemos que los aconteceres del inicio de las matemáticas de la Modernidad, y en especial el trabajo de Descartes, son un aspecto sin explorar en la formación de profesores de matemáticas.

Más aún, si se comprende la historia como una práctica social en donde diferentes discursos se concentran para generar una interpretación de los dominios del saber, “que posibilita no solo la aparición de nuevos objetos, conceptos y técnicas sino que también propicia el nacimiento de formas totalmente nuevas de sujetos y sujetos de conocimiento” (Foucault, 1996, pp. 6-7), se reconoce que en el caso de la *Geometría* de Descartes existe una perspectiva filosófica que se hace efectiva en las herramientas analíticas que se usaron para analizar problemas geométricos desde el punto de vista del álgebra. En este sentido, el profesor de matemáticas tiene una visión de la historia que le permite potenciar el desarrollo de su pensamiento matemático y configura elementos que le posibilitan construcciones respecto del conocimiento didáctico del álgebra.

Capítulo 2. Consideraciones teóricas del estudio

Este capítulo presenta las posiciones teóricas respecto al objeto de estudio. Inicialmente se realiza un planteamiento sobre las matemáticas como práctica social, el papel de la historia en ese sentido, su relación con la Educación Matemática y su importancia en la formación del profesor de matemáticas. Luego, se representan estas consideraciones respecto al conocimiento didáctico del contenido, en especial para el caso de CCK y SCK, propuestos por Ball, Thames y Phelps (2008).

¿Qué hay en la historia de la matemática que le interesa al formador de profesores de matemáticas?

Inicialmente, quisiéramos plantear que esta pregunta puede tener varias respuestas dependiendo de las consideraciones que se realicen sobre lo que son las matemáticas y lo que sería importante en su historia, al igual que lo que consideremos debe ser el conocimiento del profesor de matemáticas; en ese sentido, tomaremos una posición sobre estos asuntos.

La matemática como práctica social

Compartimos que "las matemáticas son el producto de una práctica humana común, pero al mismo tiempo este producto es parcialmente independiente de la práctica que la produjo" (Glas, 2007, p. 25). De esta manera, consideramos este conocimiento como producto del hacer que los humanos hemos construido a partir del ejercicio de unas prácticas determinadas y sobre estas reconocemos unas formas de conocer y proceder al interior de la comunidad.

Las consideraciones actuales sobre las matemáticas permiten hacer una diferencia sociológica al interior de ellas; como afirma Azzouni (2007), las matemáticas son únicas como práctica social, pues la práctica de los grupos sociales que las ejercen no necesariamente presionan la visión epistemológica de las matemáticas rígidas, los objetos que son construidos socialmente quedan relegados o, mejor, sucumben a la lógica y rigurosidad propuesta por la lógica y la teoría de conjuntos, estableciendo cierta rigidez social en el cúmulo del pensamiento matemático actual. Según este autor, esto diferencia a las matemáticas de otras prácticas sociales, pues la actividad que, por ejemplo, se ejerce durante años no modifica las consideraciones sobre las matemáticas.

A partir de estas consideraciones, entendemos que las formas simplificadas en las que se consideran las matemáticas actuales difieren de las prácticas como son y han sido construidas; en este sentido, existirían dos tipos de prácticas para el matemático: las que permiten formalizar las matemáticas y las que permiten crearlas. No necesariamente el hecho de trabajar en unas requiere el reconocimiento y la construcción de las otras. De hecho, como lo afirma Azzouni (2007), es posible que no se pueda describir el acceso epistemológico a un concepto. Entonces podemos afirmar que la práctica del matemático consiste en la demostración de teoremas, el rigor de las matemáticas; sin embargo, consideramos que muchos otros sujetos, entre ellos el profesor de matemáticas, deberían reconocer otro tipo de prácticas y posiblemente vivir la emergencia epistemológica de algunos conceptos.

Con los anteriores planteamientos es posible ingresar y profundizar un poco en las posibilidades teóricas de estas ideas que se proponen alrededor de la filosofía naturalista de las matemáticas y sus posibles implicaciones en la formación del profesor de matemáticas. Comprendemos la idea de práctica en general, y no solo para el caso de las matemáticas; como lo hace Foucault (1996), que la entiende como la dinámica que permite normalizar, determinar, regular y organizar un discurso, el cual debe su existencia a una compleja multiplicidad de interpretaciones del mundo. Esta posición teórica implica comprender que el estudio de la práctica humana revela nuevas formas de pensar y comprender el accionar de un sujeto; en este sentido,

> […] las prácticas sociales pueden llegar a engendrar dominios de saber que no solo hacen que aparezcan nuevos objetos, conceptos y técnicas, sino que hacen nacer además formas totalmente nuevas de sujetos y sujetos de conocimiento. El mismo sujeto de conocimiento posee una historia, la relación del sujeto con el objeto… (Foucault, 1996, p. 6)

En el caso de las matemáticas, esta mirada de la disciplina, como práctica social humana, permite visualizar que los objetos matemáticos se conforman en los individuos a partir de una red compleja de sentidos epistemológicos y ontológicos que permiten construir un discurso respecto a los objetos que se usan y, por tanto, a las propias matemáticas. Este discurso es producto de las reflexiones que las comunidades matemáticas realizan de los asuntos que trabajan, de tal manera que alrededor de la práctica se pueden generar nuevas visiones de los objetos matemáticos.

Es indiscutible que esta idea de práctica social se manifiesta en una serie de actividades asociadas al quehacer matemático, más allá de la demostración de teoremas y la estructuración lógica. Esta concepción ve las actividades asociadas a las prácticas matemáticas desde el momento en que se concibe algún tipo de tarea que resuelve un humano con matemáticas hasta la formalización de los objetos creados o transformados. Es decir, dada una situación a_1, existe la posibilidad de que su solución sea asumida por la comunidad a partir de actividades que se encuentren enmarcadas en la práctica social de las matemáticas; de ser así, se da inicio a una actividad que puede parar en la construcción o el cambio de una noción matemática, como en el uso de las matemáticas para resolver la situación. Ambas son consideradas, en este documento, pertenecientes a las prácticas.

Alrededor de las actividades que se configuran en la práctica matemática, compartimos con Giaquinto (2005, p. 85) que estas se pueden clasificar en:

- Descubrimiento: hace referencia a la posibilidad de revelar propiedades de los objetos matemáticos en la resolución de una situación.
- Explicación (subjetiva y objetiva): hace referencia a la posibilidad de argumentar el razonamiento que se establece en la solución del problema. Si es subjetiva, las razones que se incluyen obedecen a la misma manipulación de la situación; es objetiva si los argumentos obedecen a conocimientos matemáticos construidos en el desarrollo de otra situación.
- Formulación: hace referencia a la construcción y enunciación de algoritmos que permitan el desarrollo de diferentes situaciones parecidas o análogas a la que se está resolviendo, al igual que a la adopción y la construcción de un sistema simbólico que permita comunicar las conclusiones en la resolución de una situación.
- Aplicación: esta actividad se sitúa en la posibilidad de aplicar las conclusiones producto de la práctica matemática a otro tipo de situaciones.
- Justificación. Prueba de teoremas. Definiciones y axiomas: hace referencia al acondicionamiento al modelo que permite justificar matemáticamente propiedades o definiciones de un objeto matemático, lo que permite argumentar en una teoría la ubicación, el orden en que se adopta y se relacionan los objetos con sus propiedades y los axiomas de la teoría.
- Representación. Sistemas de símbolos y sistemas de diagramas: la adopción de sistemas de representación propios de los objetos matemáticos, como por ejemplo los adoptados en el sistema cartesiano o en la teoría de grafos, permiten actividad matemática alrededor del desarrollo de una situación problema.

El papel de la historia de la matemática en la búsqueda de las prácticas matemáticas

Esta idea de práctica matemática desde la filosofía naturalista de las matemáticas, que se puede expresar en actividades que desarrollan las comunidades de matemáticos alrededor de la resolución de una situación, está íntimamente relacionada con las posibilidades que tiene la historia de las matemáticas de involucrarse en la formación matemática de un individuo y, en especial, de un profesor de matemáticas.

Este amalgamiento implica redefinir el papel que se espera tenga la historia de la matemática, pues si consideramos que esta posibilita conocer, estudiar y entender las prácticas que permitieron el desarrollo y la constitución de un concepto matemático, es allí donde se pueden inspeccionar los principios fundamentales de este razonamiento.

Siendo así, consideramos que la historia de las matemáticas debe asumirse como un espacio revelador de las prácticas que acontecieron en la resolución de un problema en concreto; lo que implica reemplazar visiones bibliográficas y anecdóticas por revisiones históricas que permitan consolidar epistemológica y ontológicamente un objeto, trabajo que realizan, en general, los historiadores y filósofos de las matemáticas; de hecho, autores como Mehrtens, Bos y Schneider (1981) llaman a este tipo de trabajos "la historia social de las matemáticas" o "sociología de las matemáticas".

Esta visión teórica modifica la idea lineal que se observa en la mayoría de propuestas de la historia tradicional, incluyendo o profundizando el análisis de los acontecimientos que están alrededor de una práctica matemática. Deja la organización racional de las propias matemáticas, en donde se incluyen conceptos, áreas de las matemáticas y periodos de tiempo, para ocuparse de reconstrucciones multidisciplinares, en donde la comunidad científica, los problemas de la época y las concepciones sobre las matemáticas terminan mostrando las relaciones entre el conocimiento producido, la estructura social y el desarrollo de la comunidad en ese momento histórico.

Este tipo de reflexión permite estudiar a fondo los aspectos sociales, políticos o ideológicos que dieron origen a una producción matemática; indudablemente, esta va a estar ligada a cambios de concepciones, relaciones con otras ciencias y tipos de problemas que se investigan en la época. Compartimos con Mehrtens, Bos y Schneider (1981) que la historia de las matemáticas es la historia de individuos, grupos sociales e instituciones; en un nivel más sofisticado, la de los roles sociales de estos en la construcción social del conocimiento; de esta manera, los conocimientos matemáticos fueron, son y serán un proceso incrustado e inseparable de la sociedad.

Vale la pena aclarar que esta perspectiva teórica devela serias dificultades en la reconstrucción de una historia de las matemáticas, pues reconoce que alrededor de ella, se tejen asuntos sociales de difícil análisis como, por ejemplo, aspectos filosóficos que se compaginan con las matemáticas, como en el caso de Descartes. En esta línea de ideas, es claro que no es posible escribir una sola interpretación del proceso histórico que acontece alrededor de un concepto o de un personaje, sino que el papel histórico revela o devela conexiones teóricas alrededor de unas actividades que consolidan la práctica en donde se dio origen a un suceso.

De esta manera, y aunque reconocemos que las prácticas matemáticas están contenidas en prácticas sociales, este documento solo hace referencia a las actividades matemáticas que permitieron los desarrollos matemáticos, aunque entendemos que algunas de estas actividades eran problemas más generales en ciencia y filosofía o, mejor, que las intenciones de la creación están mezcladas en estos asuntos.

Las prácticas matemáticas. Un enlace entre el conocimiento didáctico del contenido del profesor y la historia de las matemáticas

A partir de las anteriores consideraciones, podemos justificar la idea central en la cual se desarrolla este documento: el uso de la historia de la matemática en el conocimiento didáctico de contenido del profesor de matemáticas. Para construir estos argumentos, este apartado presenta las relaciones que encontramos entre el CCK y el SCK, planteados por Ball, Thames y Phelps (2008), con la idea de práctica matemática y su búsqueda en la historia.

Inicialmente, reconocemos, al igual que Peressini y Peressini (2007), que aunque existen discrepancias entre la idea filosófica de las matemáticas como prácticas con los principios de la Educación Matemática, existe una relación directa entre las ideas que fundamentan la concepción de la matemática como práctica social con las teorías que se desarrollan en el seno de la disciplina educativa; en esencia, con las manifestaciones que se realizan alrededor de la solución de problemas, como base para propiciar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Respecto a esta relación, autores como Peressini y Peressini (2007) reconocen que es la formación del profesor de matemáticas un espacio propicio para el desarrollo de actividades que permitan comprender las matemáticas como práctica social, y que los medios a través de los cuales es posible su activación son los modelos desarrollados por la resolución de problemas; de esta manera, los futuros profesores no recorren una sola visión de las matemáticas, sino que se enfrentan a las formas de creación, validación y validez de estas.

A partir de estas ideas, reconocemos en la resolución de problemas una vía en donde la historia de la matemática toma vida en relación con la formación de profesores; vale la pena aclarar que esto no implica, necesariamente, propiciar el recorrido histórico de un concepto, sino el análisis de prácticas alrededor de la construcción de las matemáticas que se denotan importantes para comprender aspectos fundamentales de estas. El análisis de las actividades matemáticas que componen la práctica de las matemáticas supera el análisis epistemológico de un concepto y envía el problema a un entramado de posibilidades de análisis que permiten entender un asunto como parte de unas condiciones sociales alrededor de la comunidad matemática y que hacen que un autor configure un discurso distinto alrededor de un concepto o de las propias matemáticas.

Este es el caso de Descartes, como se trata de argumentar en el siguiente capítulo; Paty (1997) plantea que alrededor de este autor se configuran una cantidad de aspectos de tipo matemático e intenciones con las matemáticas, como la Mathesis

Universalis, la subjetividad y la inteligibilidad, las cuales le permiten romper, de alguna manera, con la tradición griega y configurar un nuevo discurso.

Esta idea de búsqueda de las prácticas matemáticas a través de la historia de las matemáticas, que se configura o se pone en acción para la formación de profesores de matemáticas, en la resolución de problemas, es una idea transversal a las experiencias que usan historia de las matemáticas en la formación de profesores; este aspecto se puede analizar desde las trazas que propone Guacaneme (2010) respecto al uso que se le ha dado a la historia de las matemáticas en la formación de profesores: las que proponen una aproximación alterna del contenido matemático a la ilustración histórica, el uso de fuentes originales, el uso de aspectos historiográficos y el uso de análisis históricos.

Es razonable pensar que, para efectos de este estudio, es indispensable hacer uso de las trazas propuestas, pues en la idea de configurar la práctica, se usan elementos históricos, historiográficos y de análisis; en la intención de componer un tipo de problema que permita trabajo sobre la práctica a un grupo de estudiantes, es necesario el uso de aproximaciones que posibiliten las actividades más importantes de la práctica, pero que posiblemente no se contextualicen de la misma manera que en la época de Descartes.

Con la postura de la relación entre historia de la matemática y formación de profesores de matemáticas, a partir de la indagación de las actividades que permiten definir la práctica que aconteció alrededor de una obra o personaje, develaremos de qué forma es posible desarrollar el conocimiento didáctico del contenido matemático de acuerdo con los argumentos expuestos.

Como ya lo hemos afirmado, pensamos que este tipo de planteamientos contribuyen al desarrollo del CCK y el SCK, propuestos por Ball, Thames y Phelps (2008). Vale la pena aclarar que, de ninguna manera, afirmamos que estos dos tipos de conocimientos deban ser desarrollados únicamente a partir de la historia de las matemáticas, sino que, de considerar su uso, esa postura implicaría discusiones a diferentes niveles con los profesores de matemáticas en formación.

Respecto al CCK, podemos afirmar que este conocimiento, que inicialmente los autores plantean como conocimiento matemático común a otro tipos de desempeños, se ve afectado por la necesidad de comprensión epistemológica y ontológica de los objetos que se ponen en juego en la solución de una situación problema asociada a actividades que determinan la práctica matemática de un autor o una época. En este sentido, podemos decir que, aunque el conocimiento es común a otras disciplinas que hacen uso de las matemáticas, para el profesor de matemáticas este debe estar fuertemente permeado por el análisis del formador del futuro profesor de matemáticas en los siguientes aspectos de las actividades que definen la práctica matemática:

- Descubrimiento: qué propiedades, relaciones y conjeturas de carácter matemático se pueden manifestar en el proceso de solución de la situación.

- Explicación (subjetiva y objetiva): qué argumentos sustentan las estrategias y los razonamientos que se utilizan en el proceso de solución de un problema, desde puntos de vista subjetivos u objetivos. Qué se considera solución para el problema, cómo sabe que el problema está solucionado.
- Formulación: qué objetos matemáticos y algoritmos de tipo procedimental son propicios para el desarrollo del proceso de resolución de la situación y de qué forma es posible presentar la(s) solución(es) de la situación.
- Aplicación: qué tipo de situaciones son posibles de resolver razonando de manera análoga a la establecida en la situación.
- Justificación. Prueba de teoremas. Definiciones y axiomas: cuáles son las consideraciones que se hacen sobre la validación, la validez y el rigor del conocimiento matemático expuesto en el proceso de solución de la situación.
- Representación*:* qué tipo de registros y sistemas de representación son necesarios en el desarrollo del proceso de resolución de la situación y cuál es la mejor forma de comunicar los resultados obtenidos.

Respecto al SCK, podemos afirmar que este tipo de conocimiento es fundamental en la formación del futuro profesor de matemáticas, no solamente diferencia el tipo de conocimiento que tiene sobre los objetos matemáticos y las propias matemáticas, sino que es justamente allí en donde se configuran conocimientos que permiten separar los saberes matemáticos de otros profesionales respecto a los profesores de matemáticas. Desde nuestra postura, un saber que pone diferencia y especializa el conocimiento del profesor es la historia de las matemáticas, creemos que permite entender y analizar las soluciones de problemas, la creación de objetos y el cambio del significado de los objetos. Creemos que la historia permite entender las actividades que permitieron la práctica que obedeció en una época a una creación y que este saber permite hacer planteamientos didácticos. A continuación, presentamos las actividades que definen la práctica matemática y que están asociadas a este tipo de conocimiento:

- Descubrimiento: se debe reflexionar sobre los aspectos que permitieron hacer el descubrimiento matemático.
- Explicación (subjetiva y objetiva): cuál es la teoría y el valor epistemológico de los objetos que permiten entender una obra o la solución de un problema.
- Formulación: cuáles son los nuevos aspectos que permitieron formular la solución de una situación.
- Representación. Sistemas de símbolos y sistemas de diagramas: se debe reflexionar sobre los tipos de representaciones que se adoptan en la época o en la obra; al igual que entender el papel de la representación alrededor de la evolución de las matemáticas.

Para efectos de contestar la pregunta con la que iniciamos este capítulo, debemos decir que lo que tiene la historia de la matemática, que le interesa al formador de profesores de matemáticas, para investigar y trabajar con los futuros profesores, se puede resumir en los siguientes cuatro aspectos:

- La visión evolutiva de la práctica matemática, lo que implica el reconocimiento de diferentes significados de validación, validación, validez, rigor, representación y la comprensión del tipo de actividades matemáticas asociadas a las diferentes etapas del proceso de resolución de problemas.
- El establecimiento de los tipos de problemas asociados a la formulación de una idea matemática, de una práctica, de un método o de un concepto específico.
- Recuperar para el análisis e investigación aspectos que no se encuentran en las matemáticas actuales y que se hallan en la práctica matemática que se estudia en la historia de las matemáticas, como, por ejemplo, exactitud, construcción, argumentación, heurísticas y diagramas.
- Componer algunos aspectos del conocimiento didáctico del contenido de los futuros profesores de matemática, haciendo parte de los aspectos relacionados con la especificación del conocimiento del profesor.

Capítulo 3. La *Geometría* de Descartes. El puente hacia las matemáticas modernas

Para hacer un reconocimiento y análisis sobre Descartes en la actividad de resolución de problemas, se hace necesario discutir el método, las técnicas, las representaciones y demás elementos que fundamentan su trabajo en el texto la *Geometría*. Para esto, primero se realiza una interpretación del texto, desde los aspectos conocidos de la obra, desprendiéndonos de su estructura inicial, para que sea posible argumentar sobre algunas de las prácticas matemáticas asociadas al trabajo en álgebra geométrica. En el proceso de comprensión y discusión sobre las prácticas matemáticas de Descartes, se estudian algunos aspectos específicos de la obra que resaltan dentro de su método y sus heurísticas en la solución de problemas geométricos. Finalmente, se hace un análisis sobre las actividades matemáticas asociadas a la resolución de problemas en el trabajo cartesiano a partir de su obra matemática principal.

Aspectos históricos y epistemológicos en relación con la *Geometría* de Descartes

Una visión epistemológica del álgebra y la geometría presenta una configuración de eventos que las hacen complemento y herramienta fundamental en el desarrollo de la matemática, en campos como el análisis, la teoría de grupos, entre otros; esta configuración no es casual, pues es el resultado de un desarrollo histórico que comenzó desde la geometría griega y se hace evidente en la forma de trabajo presentada en la *Geometría* de Descartes. Este tipo de tratamiento impone un nuevo método de abordar y resolver situaciones a través del álgebra; para interpretar y comprender este planteamiento, es necesario reconocer su contexto de fundamentación, pues el discurso alrededor del álgebra geométrica tiene que ver directamente con las prácticas contemporáneas no solo en matemáticas, sino también en ciencias naturales, arte, política y sociedad.

René Descartes, filósofo, matemático y físico francés se dio a conocer a través de sus principios filosóficos sobre la ciencia, específicamente en matemáticas; él presenta una ruptura en la forma como esta se comprende a través de su "método cartesiano". Su posición filosófica induce una interpretación de la ciencia a través de la *mathesis universalis*, que manifiesta la importancia de la matemática en diferentes contextos, como una premisa que provoca el desarrollo de un discurso matemático en diferentes ciencias.

Cuestiones sobre formas apropiadas de representación dominaron la actividad intelectual de la Europa del siglo XVII, no solo en ciencia y matemáticas, aún más profundamente en discusiones religiosas, políticas, legales y filosóficas; esta actividad se hace visible en los trabajos cartesianos, en la perspectiva de los análisis algebraicos que se fundamentan en situaciones geométricas y que se presentan bajo construcciones, expresiones simbólicas e instrumentos mecánicos dispuestos por la misma situación. Esta perspectiva de la representación implica una posición frente a la resolución de problemas geométricos, la cual Descartes dispone a través de su método.

El método filosófico y científico cartesiano se expone a través de *Las reglas para la dirección de la mente* (1628) y, específicamente, en el *Discurso del método* (1637), donde Descartes muestra la fortaleza de su método en el tratamiento de problemas geométricos, fundamentados desde la siguiente premisa: "Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos" (Descartes, 1996); esta visión se expone en el texto *Geometría* como uno de los alcances del *Discurso del método*.

La obra *Geometría* comprende tres libros; el primero estudia los problemas en donde la construcción requiere solamente del uso de líneas rectas y círculos, allí se exponen las relaciones operativas básicas entre magnitudes y su interpretación desde el punto de vista simbólico y se ejemplifica este método en el tratamiento del problema de Pappus, como un espacio donde se hace útil la relación entre álgebra y geometría al tratar una situación específica; por esto, el primer libro se expone como el apartado que hace el estudio de los problemas planos.

El segundo libro estudia la naturaleza de las líneas curvas y muestra lo importante que es para Descartes la construcción de soluciones en problemas geométricos y que, para esto, se requiere de la interpretación del tipo de curvas algebraicas que intervienen, así como de sus representaciones; el segundo libro se expone como el espacio que propone Descartes para estudiar la aceptabilidad de las líneas curvas, en el marco de su uso en el tratamiento de situaciones y en el análisis de su construcción.

El tercer libro se refiere a la construcción de problemas sólidos y supersólidos; Descartes presenta cómo las curvas pueden ser usadas como herramientas en la construcción de diversos problemas, y, además, analiza cómo intervienen en la determinación de raíces de ecuaciones algebraicas.

En el marco de la estructura que se deduce del texto *Geometría*, Bos (1998) presenta como objetivo del texto la formación de un método para el arte de resolver problemas geométricos. Describe que para realizar una lectura clara y analítica del texto, se requiere de una observación desde dos puntos de vista: desde las técnicas y desde la metodología, pues para el autor, son los aspectos que definen el propósito cartesiano en el desarrollo de la obra.

La técnica del programa proporciona un "análisis" de los problemas; es decir, un método universal para la construcción, el tratamiento y la resolución de problemas geométricos, donde el álgebra simbólica y las construcciones mecánicas juegan un papel fundamental en la formación del método. Por su parte, la metodología frente al tratamiento de situaciones geométricas se encuentra con un paradigma: el tratamiento de los problemas geométricos solo desde las construcciones con regla y compás, pues en su tratamiento, hace uso de una variedad de curvas algebraicas que amplían el espectro de estrategias en las situaciones geométricas; en este sentido, ¿cuáles fueron los medios de construcción aceptables?, y ¿cuáles representaciones se pueden usar para determinar esta aceptabilidad?, estas cuestiones nos permiten discutir sobre el trabajo cartesiano.

Igualmente, en un sentido general, Bos (1998) destaca algunos temas que son cruciales en la comprensión de la estructura de la *Geometría*: los problemas, las construcciones y las reglas que van más allá de lo matemáticamente correcto, estos temas sirven como sustento para distinguir el alcance de las representaciones y la interpretación de las curvas en el trabajo cartesiano, como pilares fundamentales en el proceso de intervención en situaciones problema en la *Geometría*.

A partir de lo expuesto, es necesario reconocer, analizar y comprender los diferentes elementos teóricos que interpretan y validan el trabajo cartesiano en la construcción y conceptualización matemática en álgebra y geometría. Descartes ocupa un lugar muy importante en el tratamiento de situaciones geométricas a partir del álgebra, por lo que algunos autores, como González Urbaneja (2004), Van der Waerden (1985) y Tabak (2004), le dan el lugar de inventor de la geometría analítica.

El trabajo cartesiano en matemáticas se hace visible en el tratamiento de diferentes situaciones geométricas, desde allí se pueden distinguir varios elementos que emergen en su desarrollo matemático: el estudio y análisis de curvas algebraicas, la construcción de curvas mecánicas y el uso de representaciones simbólicas asociadas a la operatividad entre magnitudes.

A partir de lo anterior, nos disponemos a tratar las diferentes construcciones teóricas que sustentan estas ideas y que permiten visualizar estos elementos como actividades desarrolladas por Descartes a partir de la práctica matemática desarrollada en la *Geometría*.

El tratamiento de las curvas algebraicas en Descartes. Una herramienta para el análisis de situaciones geométricas

Para Bos (1981), desde la Antigüedad hasta comienzos del siglo XVII, la colección de curvas no cambió; fueron Descartes y Fermat quienes ampliaron este conjunto al involucrar una gran variedad de curvas algebraicas, estas son las definidas por ecuaciones que contemplan el uso de operaciones algebraicas $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt[k]{\square}$ con $k > 1$ entero. En los desarrollos matemáticos de Descartes, la presencia de curvas se promueve en la interpretación de situaciones geométricas, como un medio para obtener las soluciones, pero, asimismo, este tipo de curvas se convierte en un asunto crucial de estudio en la *Geometría*.

El enorme incremento en el número de curvas construidas por los matemáticos del siglo XVII llevó a pensar sobre cómo podrían ser introducidas, descritas y definidas; y se determinó que estas nuevas curvas junto con las anteriores podrían jugar tres roles distintos, podrían ser un objeto de estudio, un medio para resolver un problema o la solución de un problema (Bos, 1981).

La noción de curva hace parte fundamental del trabajo cartesiano en la *Geometría;* uno de sus libros se dedica, exclusivamente, a estudiar la naturaleza de las líneas curvas; al respecto, estudia la aceptabilidad de las líneas curvas, principalmente desde su construcción; allí, las curvas algebraicas toman fuerza a partir de su construcción por medios mecánicos, y aunque las representaciones simbólicas no fueron un medio para determinar la aceptabilidad de la curva, sí intervinieron radicalmente en la formación de una diversidad de representaciones y de correlaciones entre sus construcciones geométricas y las expresiones algebraicas asociadas.

La noción de curva se propone, entonces, como el objeto de estudio principal en la *Geometría* de Descartes, pues, como se dijo, interviene no solo como una herramienta en la solución de situaciones, sino que, además, a partir de su relación directa con los instrumentos mecánicos y las expresiones simbólicas, se presenta como un objeto de estudio o como la solución a un problema.

La "Parábola cartesiana", introducida por Descartes, es para Bos (2001) un ejemplo de una curva que sirvió como herramienta para resolver un problema; la curva fue usada por Descartes para encontrar las raíces de ecuaciones de grados 5 y 6. Igualmente, Pascal en *Desafíos de las matemáticas,* de 1658, propone a la cicloide como un objeto de estudio y, finalmente, el autor de "Sobre la representación de curvas en la *Geometría* de Descartes" describe que la curva con ecuación

$$ae - \frac{y}{a} = a - y + x$$

es un ejemplo de una curva que se construye como la solución de un problema, llamado el famoso problema de Debeaune (1638), que posteriormente fue analizado en el cálculo de tangentes por Newton y Leibniz.

Para Molland (1976), quien contribuye en la aclaración de la naturaleza de los trabajos de Descartes, a partir de identificar la evolución de sus desarrollos frente a los presentados en la geometría antigua, las curvas geométricas requieren de una "especificación", como una forma de representación para su análisis. Molland (1976) afirma que si un geómetra quiere hablar de una curva particular, debe ser capaz de caracterizarla por medio de símbolos verbales o de otro tipo y esto le permite estudiar la especificación por propiedades y la especificación por génesis para las curvas; la especificación por propiedades establece una propiedad (usualmente una propiedad cuantitativa para todos los puntos de la curva); Molland (1976) afirma que en Descartes la especificación por propiedades está dada a partir de una ecuación y la especificación por génesis determina las condiciones y características que permiten construir la curva.

Es posible ilustrar la contribución cartesiana al estudio de las curvas en la solución de situaciones problema a partir de la comparación con diferentes estudios realizados antes de Descartes; en el caso de las secciones cónicas, es posible realizar esta comparación, pues una visión moderna de los trabajos de Apolonio sobre la geometría de las secciones cónicas tiene alcances actuales en su caracterización, pero ¿cuál fue el tratamiento que cada uno de ellos dio a las secciones cónicas? Aclarar esta pregunta nos permite indagar claramente el objetivo que cada uno tenía y cuáles fueron los roles que jugaron las curvas en su estructura matemática; Apolonio desde una visión geométrica, con las reglas de la geometría euclidea y Descartes sin la homogeneidad y con la posibilidad de la visión analítica.

El caso de las secciones cónicas

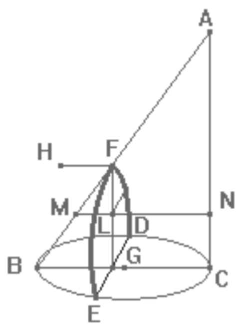
En el tratamiento de las curvas algebraicas en la *Geometría*, Descartes logra ampliar la noción e interpretación frente a las curvas que se conocían en periodos anteriores; por ejemplo, para el caso de las secciones cónicas, estudiadas con gran profundidad, desde un punto de vista geométrico en *Las Cónicas* de Apolonio, Descartes realiza un tratamiento que permite ampliar su espectro de comprensión, no solo en cuanto al rol que pueden jugar en situaciones específicas, sino también en cuanto a sus representaciones y construcciones asociadas.

El estudio que realiza Apolonio busca encontrar y validar todas las relaciones geométricas que se pueden encontrar para las secciones que se obtienen al pasar un plano por un cono de diferentes formas; sus definiciones están enmarcadas en un contexto puramente geométrico y se fundamentan en los conceptos de *razón* y *proporción*; para Molland (1976), Apolonio presenta las secciones cónicas a través de sus propiedades planimétricas, y muestra una forma de leer la geometría de coordenadas en los trabajos de la Antigüedad, en esta parte el autor declara que el método cartesiano tiene firmes raíces en la Antigüedad.

En el caso de la parábola, Apolonio presenta en la proposición 11 de su primer libro las propiedades que debe cumplir una sección específica del cono para ser denominada como parábola.

> Si se corta un cono por un plano a través de su eje, y si se corta también con otro plano que corta la base del cono según una línea recta perpendicular a la base del triángulo axial, y si además el diámetro de la sección se hace paralelo a un lado del triángulo axial, cualquier línea recta trazada desde la sección del cono hasta el diámetro de la sección paralela a la sección común del plano que corta y la base del cono; tendrá su cuadrado igual al rectángulo limitado por la porción de diámetro que comprende en la dirección del vértice de la sección y por otra línea recta; esta línea recta tendrá la misma razón a la línea recta entre el ángulo del cono y el vértice de la sección como el cuadrado de la base del triángulo axial al rectángulo limitado por los dos lados restantes del triángulo. Sea esta sección llamada parábola. (Heath, 1896, p. 402)

Figura 2. Sección parábola en Apolonio



Fuente: Heath (1896, p. 376).

Esta proposición comienza construyendo el triángulo axial, después se corta el cono con un plano, de tal forma que:

1. La intersección entre el plano de la sección y la base del cono sea perpendicular a un diámetro de la base del cono, pero no a cualquiera, sino específicamente al diámetro que al mismo tiempo es un lado del triángulo axial.
2. El diámetro de la sección resultante sea paralelo a uno de los lados del triángulo axial, diferente al que está sobre la base.

Además, cualquier línea recta trazada desde la sección hasta su diámetro debe cumplir:

1. Paralelismo con la intersección entre el plano de la sección y la base del cono.
2. Su cuadrado será igual al rectángulo cuyos lados son la línea recta comprendida entre el vértice de la sección y la intersección de esta con el diámetro de la sección; y una línea recta dada:

Cuadrado de *KL* = rectángulo *HF, FL*.

Pero FH, que es la línea recta dada, debe estar en la misma razón con la línea recta que va desde el vértice de la sección hasta el vértice del cono, que el cuadrado sobre el lado del triángulo axial que está en la base del cono con el rectángulo formado por los otros lados, es decir:

FH : FA : : cuadrado de BC : rectángulo BA, AC.

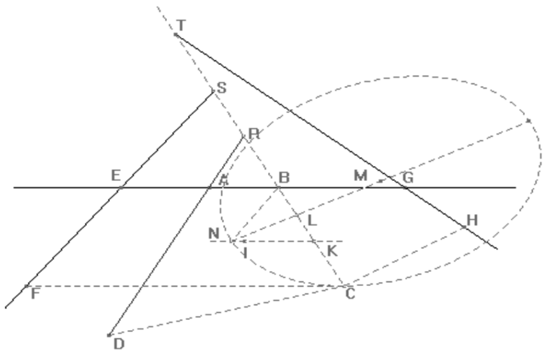
Este tratamiento lo realiza para cada una de las secciones que se producen en el cono, además profundiza en las relaciones que pueden cumplir rectas determinantes en las secciones, como ejes, diámetros y lados rectos, que en la actualidad se presentan como reglas generales para la determinación del lado recto o del foco en cada sección cónica.[2]

Teniendo en cuenta esta construcción geométrica de las secciones cónicas realizada por Apolonio, es posible realizar una interpretación de la forma como Descartes analiza las secciones cónicas y cómo las usa; para esto, es importante recordar que el tratamiento de Descartes sobre las líneas curvas se fundamenta en el trabajo simbólico que establece formas de presentación de las operaciones entre líneas rectas dadas, pues este método le da la posibilidad de llegar a relacionar las construcciones geométricas de las curvas con expresiones simbólicas asociadas; para Molland (1976), este suceso, entre otros, fue fundamental para el trabajo sobre la interpretación de las representaciones simbólicas de curvas, se establece una analogía entre las operaciones con líneas rectas (o, en terminología, segmentos de línea) y las operaciones con números.

A partir de esta descripción general, podemos presentar algunos apartados del trabajo cartesiano que evidencian la relación que guardan los trabajos de Descartes sobre curvas con el tratamiento geométrico que se da en la geometría de Apolonio. El espacio propicio donde Descartes puede tratar su método de resolución de situaciones geométricas es en el problema de Pappus (figura 3); el proceso se basa en representar todas la líneas presentes en el problema (que expresan las longitudes desde el punto *C* dado) a partir de las líneas *AB* y *CD* dadas, que él denota por x, y. Entonces las expresiones para las longitudes desde el punto *C* serán de primer grado en x, y, pues, como las líneas dadas cortan a *AB* en los puntos *A*, *E* y *G*, y cortan a *BC* en los puntos *R*, *S* y *T* y la razón $AB:BR=z:b$ es dada, entonces, por ejemplo, se tiene que $RB= bx/c$ y $CR=y+bx/z$.

2 Una revisión más exhaustiva de las construcciones y demostraciones asociadas a las propiedades de las secciones cónicas en Apolonio se presenta en el artículo "La noción de cónica en Apolonio y Descartes, un análisis comparativo", aceptado en la *Revista Brasilera de Historia de la Matemática.*

Figura 3. El problema de Pappus en Descartes. La elipse



Fuente: elaboración propia a partir de Descartes (1996).

Descartes realiza una clasificación de las líneas curvas a partir del grado de la ecuación obtenida; por ejemplo, el lugar geométrico para cuatro líneas en el problema de Pappus es una ecuación de segundo grado.

Para distinguir el problema de las cuatro líneas, Descartes logra hacer una caracterización de las secciones cónicas a partir de líneas dadas, como es el caso del lado recto. De esta forma, su caracterización tiene en cuenta varios de los resultados que obtiene Apolonio en su determinación de la sección a partir de los conceptos de *razón* y *proporción*. Entonces, al analizar el caso de la elipse, a partir de la proposición 13 del primer libro de Apolonio, que se define por medio de la proporcionalidad geométrica, Descartes comienza el proceso geométrico-algebraico de interpretar la elipse por medio de una expresión algebraica y establece las características necesarias de las secciones cónicas (lado recto, diámetro y ordenada), para así tratar el segundo problema del primer libro de Apolonio.

A continuación realizamos una descripción moderna de algunos de los desarrollos que Descartes usa en el segundo libro de *La geometría* cuando realiza un tratamiento para determinar algebraicamente una curva a partir de sus relaciones geométricas. Lo que se pretende evidenciar es que la lectura que hace Descartes del texto de Apolonio se convierte en fundamental, pues si se asumiera la resolución de alguna proposición, por ejemplo la 56, con los nuevos presupuestos planteados, respecto a la operación entre segmentos y la ruptura de la homogeneidad, es posible determinar la ecuación de las cónicas. Por tanto, Descartes tuvo que hacer una lectura profunda del texto de Apolonio y reinterpretar sus resultados desde la nueva visión de las operaciones y la escritura simbólica.

> Proposición 56 – I: Dadas dos líneas rectas perpendiculares una a la otra, encontrando una de estas como diámetro y en el mismo plano con las dos líneas la sección de un cono llamada Elipse, cuyo vértice será el punto en el ángulo recto, de modo que la

> línea recta que incide de manera ordenada desde la sección al diámetro a un ángulo dado, sea igual en cuadrado al rectángulo aplicado a la otra línea recta, teniendo como ancho la parte del diámetro entre el vértice y el punto de incidencia y en defecto por una figura semejante al rectángulo contenido por las líneas rectas dadas. (Heath, 1896, p. 460)

De esta manera, siendo *LC* la recta ubicada de manera ordenada al diámetro, *M* el punto medio de la elipse, el diámetro igual a:

$$\sqrt{\frac{a^2o^2m^2}{p^2z^2}+\frac{4a^2m^3}{pz^2}}=\frac{am}{pz}\sqrt{o^2+4mp}$$

y el lado recto igual a:

$$\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2}+\frac{4mpz^2}{a^2}}=\frac{z}{a}\sqrt{o^2+4mp}$$

debe establecerse la siguiente igualdad (teniendo en cuenta la proposición 56-I):

$$LC^2 = LN \cdot R - E.$$

De tal manera que *E* se puede encontrar a partir de la siguiente proporción:

$$\frac{E}{LN^2}=\frac{R}{D}(1)$$

Así $LN = MN - MI + LI$, con $MI=\dfrac{aom}{2pz}$, determina que *LN* es igual a:

$$\frac{am}{2pz}\sqrt{o^2+4pm}+\frac{a}{z}x-\frac{aom}{2pz}$$

A partir de esto podemos obtener que *LN*. *R* es equivalente a:

$$\frac{o^2m}{2p}+2m^2+x\sqrt{0^2+4pm}-\frac{om}{2p}\sqrt{o^2+4pm}$$

y teniendo en cuenta la igualdad descrita en (1), se puede determinar la expresión que representa el defecto que establece Apolonio en el segundo problema de su primer libro. Esto significa simbólicamente:

$$E=\frac{LN^2}{a^2m}pz^2$$

Así, se puede determinar que el área *E* es igual a:

$$\frac{o^2m}{2p}+m^2-\frac{om}{2p}\sqrt{o^2+4pm}+x\sqrt{o^2+4pm}-ox+\frac{p}{m}x^2$$

Por consiguiente, de la proposición 56-I de Apolonio, se puede determinar finalmente que:

$$LC = \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$$

Que f es la expresión que Descartes describe para la sección cónica Elipse, cuya ordenada es la línea recta *LC*, con el eje ubicado sobre la línea *LN* y con el punto medio de la elipse *M*. Descartes, en el segundo libro de la *Geometría* expone: "Esta es entonces una simple forma de determinar una curva de acuerdo a los segundo y tercer problema del primer libro de Apolonio" (Descartes, 1996, p. 426). De esta forma, manifiesta las posibles formas de representación asociadas a una curva y utiliza los desarrollos de Apolonio para realizar un tratamiento algebraico de las curvas a partir de relaciones geométricas.

Desde la perspectiva cartesiana, el trabajo que muestra la consecución de las secciones cónicas tiene dos perspectivas de tratamiento, uno desde las herramientas simbólicas que maneja Descartes para expresar algebraicamente las relaciones geométricas que están expuestas en las situaciones, y otro desde la perspectiva de la intervención trascendental de las definiciones y relaciones geométricas de las curvas, pues la geometría no solo permite manifestar las relaciones a través de un lenguaje simbólico, sino que también permite estudiar las características de las curvas, con el fin de presentar una taxonomía de las curvas a través del uso de sus representaciones.

El tratamiento cartesiano del problema de Pappus le permite tener un desarrollo que reestructura las construcciones sobre ecuaciones algebraicas que se tenían hasta este momento, además contribuye en la fundamentación de un método geométrico-algebraico para la comprensión, interpretación y solución de problemas geométricos.

Apolonio establece perspectivas genéticas y por propiedades para la definición de las secciones cónicas; su trabajo permite distinguir las propiedades que van a tener las secciones que se forman al cortar un cono por un plano de diferentes formas. Aunque Descartes no desconoce estas perspectivas y reconoce las propiedades geométricas determinadas en cada sección, hace uso de una instrumentalización mecánica para su caracterización. En términos cartesianos, las curvas pueden ser descritas por un movimiento continuo o por varios movimientos sucesivos de varias líneas, cada uno es determinado por el anterior, lo que determina que en Descartes una curva puede ser constituida por una variación, mientras que en Apolonio, la curva se construye por un corte en un cono.

La representación en Descartes. Un esquema de construcción de la geometría analítica

En la perspectiva de la Europa del siglo XVII, preguntas sobre formas apropiadas de representación dominaron la actividad intelectual, no solo en ciencia y matemáticas, quizás aún más profundamente en discusiones religiosas, políticas, legales y filosóficas (Shapin y Shaffer, 1985); por eso, se considera que la simbología cartesiana y su relación con las construcciones geométricas hacían parte del método cartesiano en sus trabajos filosóficos; es decir, no solo era una búsqueda para solucionar problemas geométricos, sino que además comprendía una manifestación del pensamiento cartesiano, específicamente en geometría. En esta misma época, tuvo escenario la discusión sobre la experimentación y su carácter representacional entre Hobbes y Boyle (Shapin y Schaffer, 1985); los filósofos naturalistas tenían estas discusiones en cuanto al desarrollo de la ciencia, en donde se analizan aspectos epistemológicos, como en este caso el valor de la experimentación, su significado y uso. Esta búsqueda logró intervenir en el trabajo de la *Geometría*, como una herramienta fundamental en el proceso de solución de problemas geométricos, caracterizada en el problema de Pappus.

La representación jugó un papel fundamental en la construcción y el tratamiento de las situaciones problema en el discurso cartesiano; la aceptabilidad de una curva como geométrica se daba en términos de su construcción, pero, a pesar de que las ecuaciones algebraicas intervinieron radicalmente en la geometría, para Descartes no eran una representación con la cual se lograra determinar la aceptabilidad de una curva, únicamente fueron un medio para su clasificación, “Descartes no considera la ecuación como una representación suficiente para una curva” (Bos, 1981, p. 6).

El método cartesiano puesto en escena en el tratamiento de situaciones problema de carácter geométrico manifiesta que se pueden encontrar diferentes interpretaciones asociadas a un mismo objeto matemático; es decir, para que Descartes lograra su objetivo de encontrar y construir las soluciones a los problemas geométricos, tuvo la necesidad de interpretar expresiones simbólicas asociadas a la construcción y las construcciones geométricas que emergen de las ecuaciones algebraicas encontradas.

El uso de diferentes representaciones asociadas a las curvas geométricas no es solo una problemática asociada al trabajo cartesiano, la caracterización de una curva (que puede o no ser tratada como una definición) se denomina especificación de una curva (Molland, 1976) y la búsqueda por especificar el tipo de construcciones que se empleaban para resolver los problemas geométricos es un análisis que se establece desde la geometría antigua.

Retomando los estudios sobre curvas en el siglo XVII, época crucial para la construcción de nuevas curvas y su caracterización en las matemáticas, se amplía el espectro de trabajo sobre los objetos matemáticos, así “las nuevas curvas, como anteriores, podían tener tres roles diferentes”, como afirma Bos (1981); ellas podían entenderse como un objeto de estudio de las matemáticas, como un medio para resolver un problema y también lograban comprenderse como la solución de un problema. Estos aspectos se pueden evidenciar en *La geometía,* por ejemplo, en el libro dos se presenta la hipérbola como la curva que incluye todas las soluciones al problema que quiere resolver, la curva como solución a un problema. En el libro tres se pueden encontrar varios ejemplos del uso de la curva como medio para resolver un problema, en todos ellos se soluciona una ecuación de tercer o cuarto grado a partir del análisis de representaciones simbólicas asociadas a la curva, y, por último, es visible que para Descartes, la curva como objeto matemático fue objeto de estudio, por ejemplo, afirma que todas las propiedades de las curvas dependen de los ángulos que estas forman con otras líneas. Para esto, estudia y caracteriza simbólicamente una curva dada a partir de los ángulos que está formando con otras líneas, estas últimas pueden ser incluso las líneas que la generan.

En los trabajos de Pascal y Fermat se puede observar que estos matemáticos median en la búsqueda de las formas de intervención de las curvas en los problemas geométricos, y allí las representaciones asociadas son fundamentales, como un medio de correlación de una construcción geométrica con sus correspondientes expresiones simbólicas que emergen de las relaciones geométricas presentes en las curvas.

Un aspecto fundamental para que Descartes lograra establecer la relación directa entre una curva geométrica y su representación simbólica fue el tratamiento inicial de la operatividad entre magnitudes asociada a una interpretación simbólica que emerge del proceso. El proceso de construcción de las soluciones asociadas al problema específico requiere del conocimiento de la longitud de ciertas líneas, lo que Descartes considera suficiente para solucionar el problema; por esta razón, define en su libro primero de la *Geometría* cada uno de los procesos geométricos relacionados con el trabajo entre magnitudes y su respectiva interpretación simbólica.

Por ejemplo, para el producto, Descartes propone: "sea *AB* tomada como unidad, esta se requiere para multiplicar *BD* por *BC*. Yo solo tengo que unir los puntos *A* y *C* y trazar *DE* paralela a *CA*, entonces *BE* es el producto de *BD* por *BC*" (1996), y luego declara que a menudo es necesario dibujar las líneas sobre el papel, pero es suficiente designar cada una por una letra, y mostrar que para el producto *ab* es *a* multiplicado por *b*. De igual forma, se sigue atendiendo al uso de consonantes *a*, *b*, *c*,… para las longitudes conocidas en un problema y, *x*, *y*, *z,* para las desconocidas, lo cual ya era es usado por autores como Vieta.

Este tratamiento dio la posibilidad de establecer relaciones directas entre las construcciones geométricas y las expresiones simbólicas asociadas; por ejemplo, para el problema de Pappus, el uso del método cartesiano, en cuanto a la interpretación mediante expresiones simbólicas de las relaciones que se exponen en el problema, fue crucial para la determinación de las curvas asociadas a la situación. Como se presentó anteriormente, el tratamiento del problema de Pappus permitió identificar, por ejemplo, que para el caso de cuatro líneas, la situación se presentaba a partir de una ecuación de segundo grado, pues su tratamiento sobre la interpretación de las relaciones operativas entre magnitudes le permitió interpretar el producto de longitudes, a partir de sus expresiones algebraicas relacionadas, por medio del trabajo simbólico.

Este tratamiento tuvo un alcance tan significativo en este problema que fundamentó claramente las herramientas para la obtención de soluciones generales a problemas geométricos específicos; su interpretación del proceso para obtener ecuaciones a partir de las relaciones geométricas inmersas en la situación, le permite distinguir el tipo de solución que obtendrá respecto al número de rectas que intervienen en el problema de Pappus; es decir, ¿qué tipo de curvas sirven como solución para el problema de Pappus cuando intervienen *n* rectas?, para responder a esta cuestión, Descartes realiza una clasificación de las soluciones, que Bos (1981) resume de la siguiente manera:

- 3, 4, 5 líneas, pero no 5 líneas paralelas: la ecuación es de grado ≤2; por lo tanto, los puntos sobre los lugares pueden ser construidos con regla y compás.
- 5 líneas paralelas, 6, 7, 8 o 9 líneas, pero no 9 líneas paralelas: la ecuación en *x* (o para 5 líneas paralelas en *y*) es de grado ≤4 y así los puntos sobre los lugares pueden ser construidos por medio de intersecciones entre cónicas; en algunos casos, la construcción por regla y compás solo puede ser posible si las ecuaciones pasan a ser de grado ≤2 o si ellas son reducibles a tales ecuaciones.
- 9 líneas paralelas, 10, 11, 12, 13 líneas, pero no 13 líneas paralelas: la ecuación e *x* (o en *y* en el caso de 9 líneas paralelas) es de grado ≤6; la construcción por medio de intersección entre secciones cónicas en general no será posible y curvas más complicadas tendrán que ser usadas, etc.

Las curvas mecánicas como herramientas en la interpretación geométrica del álgebra simbólica

El proceso para solucionar un problema viene acompañado de todo el conjunto de herramientas y representaciones que contribuyan a determinar las soluciones asociadas al problema. Para Descartes, en la construcción de un problema geométrico, es suficiente con conocer las longitudes de algunas de las líneas que intervienen en el proceso, pero su proceso no culmina en la obtención de una expresión algebraica relacionada con la situación, pues también era indispensable buscar las formas en que las soluciones fueran construibles; al respecto, la noción de curva forma parte fundamental del proceso, por ser el objeto que permite la construcción del problema.

Desde periodos anteriores a Descartes, la noción de curva tenía un papel importante en la solución de problemas geométricos; estos problemas podían ser planos, lineales y sólidos, y su dificultad aumentaba según la complejidad del tipo de curva que se estuviera usando; se reconocía, por ejemplo, que las secciones cónicas, usadas en los problemas lineales, se podían obtener en la solución de los problemas planos. De este modo, Molland (1976) discute la denominación de estas curvas como mecánicas, pero relaciona esta nominación con el problema de la construcción, donde, en la solución de problemas, se hacía necesario la construcción de las curvas por medio de una máquina para obtener la solución del problema desde el punto de vista geométrico.

Las curvas mecánicas en Descartes intervienen trascendentalmente en la estructura de su discurso asociado a la resolución de problemas geométricos. El tratamiento del movimiento y de la instrumentalización relacionado con la solución de problemas geométricos permite distinguir dos alcances del uso de instrumentos mecánicos en la construcción de curvas: el primero, desde el punto de vista del tipo de instrumentos nuevos que iba a usarse, más allá de la regla y el compás, y el segundo, desde los enlaces que permitió establecer entre las representaciones en geometría y álgebra.

La instrumentalización y la representación de curvas en Descartes

El uso de representaciones fue un aspecto fundamental en Descartes para el tratamiento de los problemas geométricos; específicamente, en la *Geometría*, Descartes realiza un análisis que le permite llegar a procedimientos de relación entre variables, que bien podrían interpretarse como bases para el tratamiento sobre sistemas de coordenadas. Uno de los alcances del método cartesiano se visualiza en los diferentes caminos que le permiten llegar a relacionar formas de representación entre la geometría y el álgebra, por ejemplo, es importante identificar que las curvas fueron el punto de partida en varios de sus análisis, construidas a partir de sus propiedades geométricas, luego estas propiedades se lograron interpretar a partir de la construcción de instrumentos mecánicos que posteriormente se representaban a partir de ecuaciones, desde un lenguaje simbólico.

En el libro dos de la *Geometría,* Descartes propone una discusión sobre lo válido que podría ser aceptar como geométrica únicamente la presión que posibilita el uso de la regla y el compás y llamar mecánicas a las curvas que son posibles de representar por medio de otro tipo de compás o máquina. Bos (2001), en las *Reflexiones privadas* de Descartes y en especial en una carta que le envía a Beeckman, hace referencia a la posibilidad de construcción de instrumentos para trazar curvas, y realiza algunos bosquejos, el trisector cartesiano y el mesolabio se encuentran entre ellos. Según Bos (2001) y Dennis (1997), estos instrumentos no existieron físicamente, fueron dibujados y explicados bajo relaciones geométricas que permitian entender y simular el tipo de curva que sería posible trazar. Sin embargo, algunos de estos diseños son usados en la *Geometría* y en *Reflexiones privadas* para argumentar las relaciones geométricas que permiten justificar y representar simbólicmante las curvas.

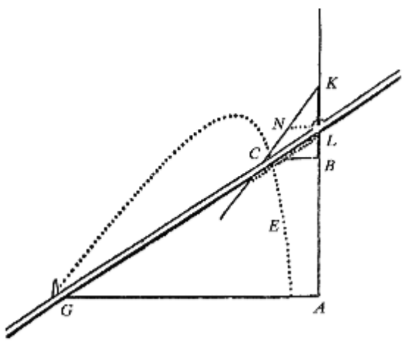
De esta forma, el problema no terminaba con la determinación del tipo de curva que podía solucionar el problema; su construcción provocó una complejización de la noción de curva, al ser analizada desde diferentes representaciones, una de estas por medio de su construcción geométrica, que realza la importancia de los instrumentos mecánicos cartesianos en la construcción de ecuaciones que representaban la relación entre dos o más variables.

Durante el siglo XVII, se presenta un giro trascendental en el tratamiento de la geometría; la *Geometría* de Descartes no fue sobre construcciones estáticas y pruebas axiomáticas, su tratamiento, basado en la necesidad de la construcción en los problemas, presentaba herramientas para el estudio de movimientos mecánicos y sus posibles representaciones por ecuaciones algebraicas; los problemas clásicos fueron direccionados a los problemas de lugares determinados por el movimiento de dos o más líneas, esto permitía ampliar la restricción del trabajo únicamente desde la regla y el compás para dar la posibilidad de involucrar una variedad de movimientos que determinaban una diversidad de curvas algebraicas en el análisis.

La *Geometría* manifiesta la importancia de los instrumentos mecánicos en la determinación de relaciones entre las formas de representación en geometría y en álgebra, no solo en sus construcciones y relaciones geométricas, sino también a partir de la evidencia de la variación en sus instrumentos, pues es allí donde se muestran las relaciones que posteriormente se presentan como expresiones simbólicas generalizadas; entonces, para una clara comprensión del sentido del movimiento en Descartes, es necesaria la comprensión del bosquejo de sus herramientas. Descartes describe sus instrumentos como se anota a continuación.

Suponga la curva *EC* descrita por la intersección entre la regla *GL* y la figura plana rectilínea *NKL*, cuyo lado *KN* es prolongado indefinidamente en la dirección de *C*, y que, siendo movida en el mismo plano tal que este diámetro *KL* siempre coincida con alguna parte de la línea *BA* (prolongada en ambas direcciones), define para la regla *GL* un movimiento de rotación sobre *G* (la regla está articulada en la figura CNKL en L). Si deseo encontrar qué clase de curva es esta, escojo una línea recta, como *AB*, para referirme a todos sus puntos, y sobre *AB* escojo un punto *A* para que sirva como investigación. digo "escojo este y qué" porque somos libres de escoger cualquiera; cuando sea necesario, tener cuidado en esta elección para hacer una ecuación lo más corta y simple posible, sin embargo, no importa la línea que debería tomar en lugar de AB pues la curva siempre será de la misma clase.

Figura 4. Construcción mecánica de la hipérbola en Descartes. Geometría 1637



Fuente: Descartes (1996, p. 415).

Descartes denota los segmentos fijos de la construcción *GA*, *KL* y *NL* a partir de las letras *a*, *b* y *c*; haciendo uso de las relaciones de semejanza que se encuentran invariantes en la construcción, describe expresiones que representan las relaciones geométricas entre los segmentos. Entonces, introduce las variables (usa el término "cantidades desconocidas o indeterminadas") $AB = y$, $BC = x$ (en notación moderna, $C = (x,y)$), y las constantes ("cantidades conocidas") $GA = a$, $KL = b$, y $NL = c$. Descartes usa rutinariamente las letras *x*, *y*, *z* como variables y *a*, *b*, *c* como constantes; nuestra convención moderna se deriva de este uso. Continuando con el proceso, como los triángulos *KLN* y *KBC* son semejantes, se tiene que

$$\frac{c}{b} = \frac{x}{BK}, BK = \frac{b}{c}x, BL = \frac{b}{c}x - b$$

De aquí se sigue que $AL = y + BL = y + \frac{b}{c}x - b$

Como los triángulos *LBC* y *LAG* son semejantes, se tiene $\frac{BC}{BL} = \frac{AG}{AL}$. Esto implica la siguiente cadena de ecuaciones:

$$\frac{x}{\frac{b}{c}x - b} = \frac{a}{y + \frac{b}{c}x - b}$$

$$x\left(y + \frac{b}{c}x - b\right) = a\left(\frac{b}{c}x - b\right)$$

$$xy + \frac{b}{c}x^2 - bx = \frac{ab}{c}x - ab$$

$$x^2 = cx - \frac{c}{b}xy + ax - ac$$

Descartes deja el término x^2 en la parte izquierda de esta ecuación con el objeto de enfatizar sobre el segundo grado. Concluye que la curva que determina esta ecuación es una hipérbola. Pero ¿cómo concluye esto?, es necesario reconocer que Descartes asumía que los lectores de la *Geometría* estaban familiarizados con los trabajos de Apolonio. Para esto, es importante tener en cuenta que si uno prolonga el triángulo *NLK* a lo largo de la línea vertical, y continúa trazando el lugar de la intersección de *GL* con *NK*, las líneas eventualmente serán paralelas, y luego aparecerá la otra rama de la hipérbola. Esta presentación del uso de los instrumentos mecánicos en el establecimiento de relaciones entre lo geométrico y lo algebraico permite distinguir dos aspectos importantes: por un lado, define claramente una diversidad de curvas que pueden interpretarse desde lo geométrico, lo mecánico y lo algebraico como una disposición de representaciones frente al concepto de curva, y, por otro lado, permiten definir que las herramientas algebraicas siempre vienen vinculadas de las relaciones geométricas que fundamentan el proceso, es decir, este caso muestra una curva cuya representación simbólica es una ecuación de segundo grado, pero el tipo de curva está caracterizado por las herramientas geométricas que había propuesto Apolonio en la Antigüedad.

Descartes aborda aquí varios de sus principales puntos que se encuentran entre las acciones geométricas y sus representaciones simbólicas. Su "clase de curvas" se refiere al uso de grados algebraicos para crear una taxonomía de curvas. Él afirma que el grado de una ecuación que representa una curva es independiente de cómo escoge el sistema de coordenadas (Dennis, 1997). Este tratamiento permite afianzar la idea de presentar las expresiones simbólicas como un medio para interpretar las relaciones geométricas propuestas en cada situación.

El trabajo sobre los instrumentos mecánicos fue decisivo en la *Geometría;* al respecto, uno de los objetivos del texto es el estudio de las líneas curvas con el fin de determinar su aceptabilidad en geometría. Para Bos (2001), es claro que las expresiones algebraicas, ecuaciones y relaciones, que se determinaron a partir de las relaciones geométricas expuestas en cada instrumento o curva, no sirvieron como un sustento válido para reconstruir argumentos que permitieran "aceptar" una curva en geometría. El principal argumento usado para la validación de una curva en matemáticas fue su construcción, pues es allí donde se presentaron como herramientas o como soluciones a problemas geométricos, el carácter constructivo estaba por encima del simbólico.

Desde la perspectiva de la importancia de las construcciones en el análisis de las curvas, los instrumentos mecánicos intervinieron profundamente en su aceptabilidad; por un lado, permitieron ilustrar construcciones que validaran curvas algebraicas, y en otro sentido, provocaron una gran discusión sobre si las curvas construidas por instrumentos mecánicos podrían denominarse como mecánicas o geométricas, pero no cabe duda de que son precursores de la variación, del movimiento entre líneas para la determinación de construcciones dinámicas y de motivadores de relaciones entre representaciones geométricas y algebraicas.

Actividades asociadas a la resolución de problemas

El desarrollo presentado hasta el momento da cuenta de las estrategias, el lenguaje, los argumentos y las representaciones que comprenden el trabajo cartesiano en la *Geometría*. En este apartado, se pretende hacer explícitas estas formas de proceder en Descartes como un investigador que resuelve problemas, en el sentido de caracterizar su trabajo como matemático; es decir, se describe el proceso a través del cual daba soluciones a las situaciones geométricas y algebraicas que se le presentaron.

Para manifestar y caracterizar el trabajo de Descartes en el proceso de resolución de problemas, es necesario referirse a las situaciones problema que fundamentaron el discurso de la *Geometría*, y para ello también es importante reconocer que todas las situaciones no tienen el mismo estatus epistemológico dentro de la constitución del libro, pues algunos problemas tenían el carácter de responder a una pregunta específica, como cuál es el tipo de curva que describe el movimiento de dos o más líneas cuando algunas cantidades permanecen invariantes, en cambio otros tenían un carácter más general, como qué tipo de curvas me permiten solucionar una ecuación algebraica de grado $x \geq 2$. Lo importante en esta cuestión es que para los problemas geométricos, Descartes tenía un método fundamentado en suponer que el problema estaba resuelto para así poder trabajar con las expresiones y relaciones que se deducen de esto.

Dentro del esquema previsto para la solución, es posible analizar que en el proceso de formulación de la resolución, Descartes suponía el problema resuelto como una estrategia que le permitía emplear un lenguaje simbólico en el establecimiento de las relaciones geométricas presentes en la situación, además de trabajar con las expresiones algebraicas que interpretaban el trabajo entre magnitudes, lo cual le daba la posibilidad de moverse con algoritmos y procedimientos que le permitían llegar a comunicar sus conclusiones a partir de la expresión obtenida.

Por ejemplo, para el problema de clasificar las "curvas geométricas" según el grado de la ecuación asociada, estudia el caso de la curva *EC* descrita por la intersección de la regla *GL* y la figura plana rectilínea *CNKL*, cuyo lado *KN* se prolonga indefinidamente en la dirección de *C*, y al estar movida en el mismo plano en el que está este lado *KL,* siempre coincide con alguna parte de la línea *BA* (prolongada en ambas direcciones), e imparte a la regla *GL* un movimiento de rotación sobre *G* (la regla atada a la figura *CNKL* en *L*) (figura 4). En este caso, Descartes establece simbólicamente las relaciones geométricas que subyacen de la situación, lo que le permite llegar a la expresión:

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$$

Esta igualdad le permite comunicar la conclusión solicitada, la curva construida en este movimiento es de primera clase, y para Descartes, es específicamente una hipérbola; para el análisis que nos remite en este caso, también realiza un proceso de aplicación, pues este método lo conforma como general para el análisis de todo tipo de curvas; con el fin de analizarlas y clasificarlas, en la primera parte del segundo libro afirma:

> Yo podría dar a conocer muchos caminos para trazar y concebir una serie de líneas curvas, cada una más compleja que la anterior, pero pienso que el mejor camino para agruparlas y clasificarlas en orden, es por el reconocimiento del hecho por el cual todos los puntos de aquellas curvas que he llamado "geométricas", esto es, aquellas que admiten una medida precisa y exacta, deberán tener una relación definida para todos los puntos de una línea recta y que esta relación debe ser expresada por medio

> de una sola ecuación. Si esta ecuación no contiene términos de mayor grado que un rectángulo de dos cantidades desconocidas, o el cuadrado de una, la curva será de primera y segunda clase, que contiene solo el círculo, la parábola, la hipérbola y la elipse, pero cuando la ecuación tiene uno o más términos de tercer o cuarto grado en una o dos cantidades desconocidas, la curva será de segunda clase, …y así indefinidamente. (1996, p.416)

Esta conclusión permite identificar que la formulación propuesta por Descartes para el análisis de la construcción de una curva se presenta luego del proceso de descubrimiento de las relaciones existentes entre la construcción geométrica y las representaciones simbólicas propuestas en una ecuación, un proceso heurístico que motiva el trabajo en resolución de problemas.

El método cartesiano, como base en la solución de problemas, propone el uso de representaciones, técnicas y herramientas de construcción (máquinas) en su proceso y validez; se trata de una forma enriquecida de relacionar los elementos en álgebra y geometría que pueden contribuir al analizar una situación específica. En este sentido, dispone de herramientas para que quien resuelve pueda evidenciar desde diferentes puntos de vista que es posible dar una interpretación a una construcción geométrica. Para referirse a la solución de problemas en geometría, donde a partir de algunas cantidades conocidas es posible obtener una construcción de la situación, indica:

> Pero no me detengo a explicar esto con más detalle para no privar a cada uno del placer de aprenderlo por sí mismo, ni impedir el cultivo útil del propio espíritu ejercitándolo, que es, a mi parecer, la principal utilidad que puede obtenerse de esta ciencia. (1996, p. 393)

Descartes enriquece no solo el método, sino también las cualidades investigativas en quien resuelve problemas; fortalece la idea del uso de representaciones y herramientas en la solución de problemas geométricos, y lleva a la persona que resuelve a cultivar una actividad principal en matemáticas, la del *descubrimiento*.

El trabajo cartesiano es bastante enriquecedor en cuanto al uso de una diversidad de representaciones para referirse a las situaciones geométricas planteadas, además presenta diferentes relaciones entre estas representaciones, lo que lo hace un fundamento principal en el trabajo de álgebra y geometría. Es crucial indicar que el trabajo cartesiano presenta un álgebra que no se fundamenta en un trabajo simbólico, sino que es resultado de la correlación de eventos y relaciones geométricas que no se desvanecen en el trabajo sobre ecuaciones; es más, el álgebra se conecta con la geometría en gran parte del tratamiento de las situaciones.

El método cartesiano en matemáticas identifica como su principal objeto de estudio las líneas curvas; a partir de su uso y caracterización, es posible identificar una forma de tratar las situaciones geométricas; por eso, para Descartes se convierte en un problema la búsqueda de caracterizar las líneas curvas por diferentes medios; los instrumentos mecánicos y las expresiones simbólicas asociadas emergen como los principales elementos que permiten estudiarlas, analizarlas y tipificarlas. Para esto, Descartes describe una de sus formas generales así:

> Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas, [...] y conocer la manera de trazar otras líneas que las corten en todos esos puntos en ángulo recto. [...] Y me atrevo a decir que este es el problema más útil y más general no solo que yo conozca, sino aun que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría. (1996, p. 434)

Este termina siendo el modelo que permitirá a Descartes acercarse a las formas de expresión simbólicas que describan cada una de las cualidades que se construyen en las curvas algebraicas y las situaciones geométricas.

Capítulo 4. La *Geometría* de Descartes en la formación de profesores de matemáticas

Al interior de este capítulo se presenta un intento de interpretación no lineal del texto de Descartes, *Geometría* (la traducción al español realizada por Sánchez y Quintas en el año de 1996); durante este proceso, se lleva a cabo un análisis de contenido cualitativo-descriptivo que permite seccionar el documento y descifrar los mensajes de las comunicaciones que se encuentran al interior. En relación con esto, compartimos con Navarro y Díaz (1994) que el contenido de un texto no está en realidad en este, sino fuera de él, en un plano en donde revela su sentido. Al interior de las comunicaciones, se mantienen mensajes ocultos que son descifrados a través de la complejidad y la globalidad de la comunicación.

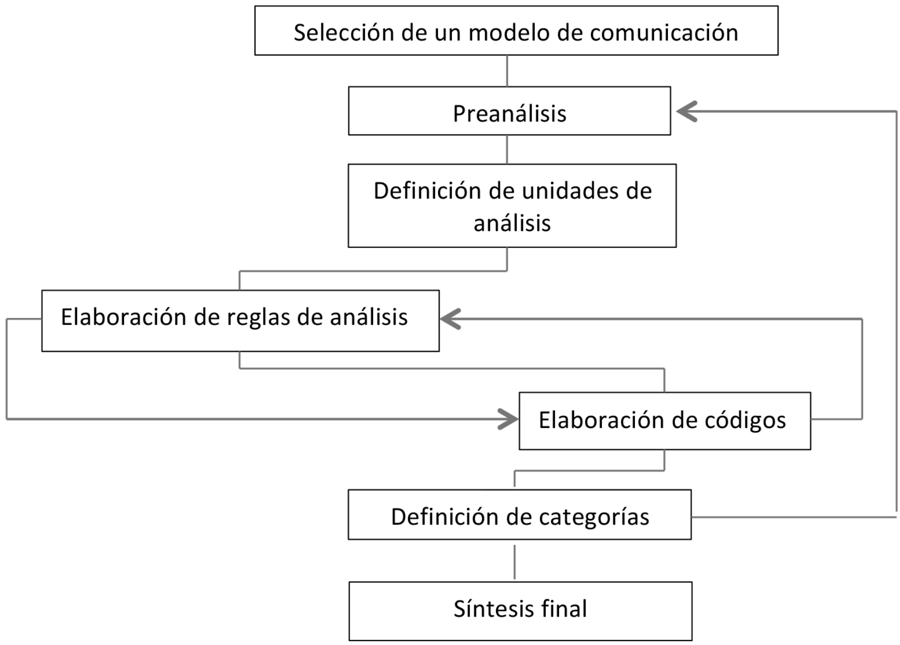
Los documentos que proporciona la historia de la matemática a los formadores de profesores de matemáticas son, en su mayoría, comunicaciones escritas, y, de acuerdo con Navarro y Díaz, "el análisis de contenido de un texto tendría la misión de establecer las conexiones existentes entre el nivel sintáctico de ese texto y sus referencias semánticas y pragmáticas" (1994, p. 180). Es decir, lo que podría entender el formador de profesores de matemáticas de una obra histórica es la organización del texto, respecto a su significado y los factores extralingüísticos que contextualizan la estructura del texto.

Para efectos de este trabajo, vamos a implementar la propuesta metodológica de análisis de contenido cualitativo descriptivo, que plantea lo siguiente.

> El análisis cualitativo de contenido se define a sí mismo dentro de este marco de trabajo como una aproximación empírica, de análisis metodológicamente controlado de textos al interior de sus contextos de comunicación, siguiendo reglas analíticas de contenido y modelos paso a paso, sin cuantificación de por medio. (Mayring, 2000, citado en Cáceres, 2003, p. 56)

Este tipo de metodología permite el análisis de las comunicaciones a partir de unidades de análisis cualitativas que permiten una interpretación o una descripción de aspectos específicos determinados por el investigador. La figura 5 muestra las fases del proceso que vamos a llevar a cabo:

Figura 5. Método propuesto por Cáceres



Fuente: Cáceres (2003, p. 59).

A continuación se presenta la aplicación de este diseño metodológico para el caso de la comunicación que es de nuestro interés: la *Geometría*.

Selección del objeto de análisis

Aunque el estudio realizado por Bos (2001) hace un análisis sobre el texto, en especial sobre los conceptos de *exactitud* y *construcción,* para efectos del objeto de este trabajo, vemos necesario poder determinar con mayor precisión los intereses de la obra, haciendo uso de las actividades que consideramos pertinentes para la práctica que se llevó a cabo y que fueron discutidas en el capítulo anterior. Para efectos de los análisis que creemos debe hacer el formador del profesor de matemáticas, este debe tener una interpretación puntual de la propuesta y su desarrollo a partir del análisis del propio texto; la práctica que se encuentra en el texto debe ser auscultada desde la mirada del profesor de formadores de profesores de matemáticas y desde la posibilidades de desarrollo del conocimiento didáctico del contenido matemático.

Por tanto, reconocemos que la comunicación más importante que realizó Descartes fue el texto del cual hemos venido hablando y sobre este, reconocemos una primera clasificación o estudio de la obra realizada por Bos (1998), en donde se determina el objetivo de cada parte o libro del texto, y queda claro que la parte uno hace referencia al análisis de los problemas planos; la segunda, a la aceptabilidad de las curvas, y el libro tres plantea las curvas simples y sus construcciones. Sin embargo, esta clasificación deja de lado algunos de los problemas y actividades planteados alrededor de la práctica matemática que los historiadores indican que se encuentran al interior de la obra, aspecto que creemos se puede superar al intentar ver la obra no desde los libros en que está distribuida, sino desde otro tipo de categorías.

Creemos que una disección de la obra que evidencie una reorganización de esta a partir de aspectos que se relacionen con las actividades de la práctica matemática que se adelantaba en la época permite, como afirma Cáceres (2003), un agrupamiento que posibilite niveles de abstracción e interpretación de la comunicación, que concluyan en establecer relaciones o inferencias entre los temas analizados.

El preanálisis

Esta fase considera la interpretación de las conclusiones teóricas de los trabajos que existen respecto al texto matemático de Descartes, en especial los realizados por Bos (1998, 2001). El primer estudio de la obra se realiza por medio de esta información y origina las siguientes afirmaciones:

1. En el desarrollo matemático que presenta Descartes en la *Geometría*, la solución de situaciones de tipo geométrico tienen como prioridad la determinación de soluciones exactas por métodos geométricos; para esto, toma en cuenta la utilización de diferentes herramientas mecánicas que le permiten construir estas soluciones. En este sentido, la construcción de curvas se convierte en heurística para la resolución de la situación; líneas rectas y círculos son insuficientes a la hora de resolver algunos problemas sólidos y lineales (que hacen uso, además de líneas y círculos, de secciones cónicas y líneas curvas compuestas); por esta razón, las representaciones, los instrumentos y la naturaleza de las líneas curvas se establecen como objetivos fundamentales de la *Geometría*.

2. En el proceso de determinación de soluciones para los problemas geométricos, Descartes asume como primordial el estudio de la aceptabilidad de una línea curva; esto hace que el producto de la propia construcción se convierta en un nuevo problema para resolver, de tal forma que la instrumentalización mecánica toma un papel fundamental en el proceso de construcción.

3. A partir de la arquitectura de instrumentos para la construcción de curvas, Descartes establece diferentes representaciones, como medio para determinar diversas maneras de estudiar una curva específica; para Bos (1981), en la *Geometría,*

la representación de curvas es fundamental para estos problemas, los argumentos sobre la aceptabilidad de curvas solo pueden ser formulados en términos de las representaciones de las curvas; esta compleja discusión muestra el tratamiento de tres métodos diferentes de representación: representación que especifica el movimiento continuo para trazar la curva, representación por el método de construcción de puntos sobre la curva y representación que especifica el rastreo del instrumento que involucra rectas; además, se hace referencia a otro, la representación por su ecuación, y se aclara que para Descartes, esta representación no se considera como totalmente aceptable.

Estos tres elementos son el punto de partida del análisis y permiten definir las unidades de análisis correspondientes; debe ser claro que los aspectos anteriormente nombrados hacen parte de los asuntos que en primera instancia llaman la atención para la formación de profesores; esta fase de preanálisis, tal y como la describe Cáceres (2003), explicita los objetivos y el interés de estudio de la obra, revela las primeras interpretaciones del material de trabajo y centra el objetivo en una parte del objeto.

Unidades de análisis

Se tiene en cuenta que

> Las unidades de análisis representan los segmentos del contenido de los mensajes que son caracterizados e individualizados para posteriormente categorizarlos, relacionarlos y establecer inferencias a partir de ellos. En ocasiones, a la unidad de análisis propiamente tal se le denomina "unidad de registro", es decir, la unidad de contenido significativo dentro del documento que servirá para extraer resultados. (Briones, 1988b, citado en Cáceres, 2003, p. 9)

Para proceder en la toma de decisiones sobre las unidades que nos permitirán completar el análisis del texto y llevar a cabo la descripción que pretendemos poner en juego en la formación de profesores, es necesario contar con los siguientes aspectos:

- La traducción de la *Geometría* con que trabajamos es la versión en español traducida por Sánchez y Quintas; recordamos que este documento no presenta un trabajo matemático en las condiciones de lo que hoy consideramos y más bien, podríamos decir, está escrito de manera retórica. No está organizado a partir de postulados y proposiciones y las palabras "teorema" o "corolario" no aparecen dentro del léxico y la organización lógica del texto.

- Dentro de la definición teórica de las actividades que permean la práctica matemática, hemos aclarado aspectos fundamentales de ellas para efectos del conocimiento didáctico del contenido matemático; por lo tanto, las unidades de análisis del texto están relacionadas con las actividades de descubrimiento, explicación, formulación y representaciones expuestas anteriormente.

- Se usa una disección a partir de frases que contienen las palabras tomadas como unidades de análisis, o que al interpretarlas contienen el significado de dicha unidad.

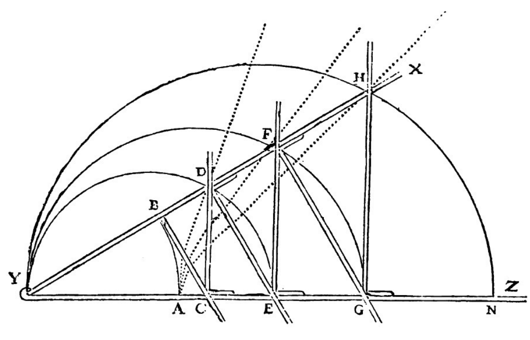
Inicialmente, se tienen cuatro unidades de análisis que hacen referencia a frases que contengan o signifiquen alrededor de la(s) palabra(s): definición, prueba, construcción mecánica, demostración-construcción. La primera se refiere a cuáles son los soportes matemáticos con que planea la obra y qué aspectos considera concluidos al punto de intentar definirlos. La segunda intenta determinar el tipo de argumentos con los que el autor va construyendo la obra. La tercera unidad se deduce de la importancia que encontramos en la dicotomía que Descartes quiere abordar respecto a las curvas mecánicas y los instrumentos utilizados para trazarlas, en comparación con los trabajos de la Antigüedad con regla y compás; se consideran los apartes en donde se hace uso de instrumentos mecánicos o en donde se infiere un movimiento de líneas rectas para generar curvas. El cuarto análisis intenta determinar si la idea de construcción matemática agenciada por medio de instrumentos mecánicos hace parte del modelo de validación utilizado por Descartes para dar validez a las formulaciones teóricas que realiza.

Con el ánimo de intentar sistematizar, la información se acopia en la tabla 2. La primera columna indica el número de la página del libro original y en la segunda se encuentra el fragmento que nos interesa para el análisis, o una interpretación de lo que hace el autor o la frase de lo que se encuentra en esa parte del texto.

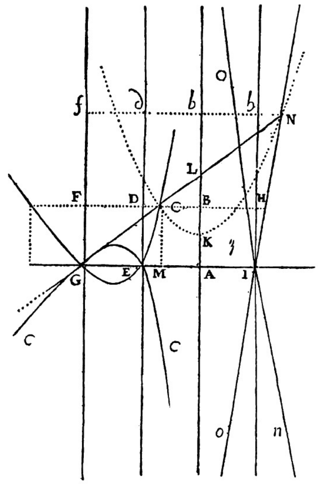
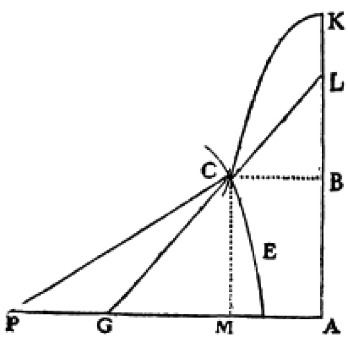
Tabla 2. Análisis primeras categorías

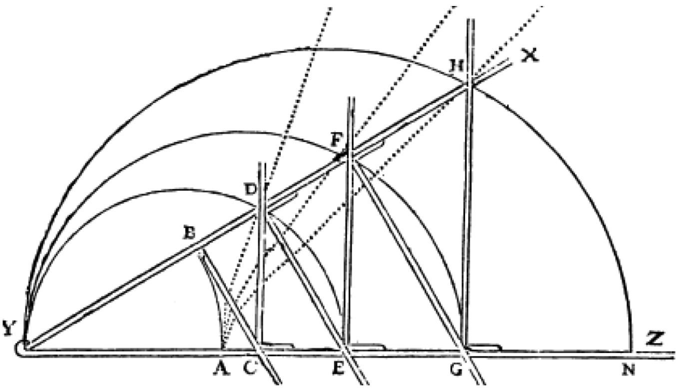
Definiciones	
370	**Definiciones de operaciones:** no son necesarias en geometría para llegar a conocer las líneas que se buscan y para disponerlas a ser conocidas, sino añadir o sustraer otras, o bien tomando una línea que consideraré como la unidad para relacionarla tanto más fácilmente con los números (multiplicación, división y raíz cuadrada).
371	**Sobre el uso de letras en geometría:** no es necesario trazar de esta forma tales líneas sobre el papel, es suficiente designar cada una de ellas por una letra. Así, para sumar la línea *BD* y *CH,* llamo a la una *a* y a la otra *b* y escribo $a + b$. Por lo tanto, escribiré $a - b$ para indicar la resta de *b* respecto de *a*. Y escribiré *ab* para indicar la multiplicación de una por la otra. Así mismo *a/b* para dividir *a* por *b*. Y *aa* o a^2 para multiplicar *a* por sí misma, y así hasta el infinito; y $\sqrt{a^2+b^2}$ para obtener la raíz cuadrada de $a^2 + b^2$; finalmente $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$ para obtener la raíz cúbica de $a^3 - b^2 + abb$ y de forma similar para otras.
372	**Raíz cúbica:** igualmente, se debe tener en cuenta que todas las partes de cada línea deben, ordinariamente, expresarse con el mismo número de dimensiones cuando la unidad no ha sido establecida en la formulación del problema. Así, a^3 contiene las mismas dimensiones que *abb* o que b^3.

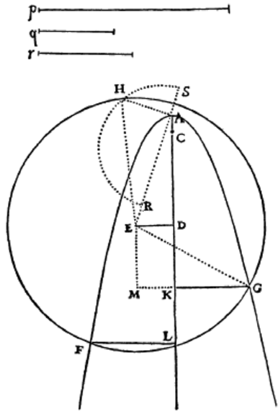
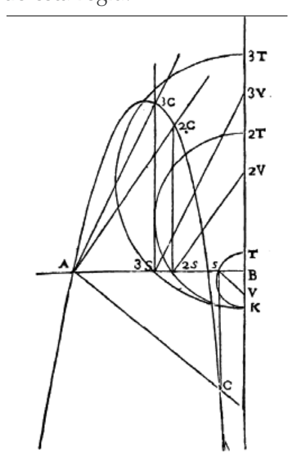
373-374	**Sobre el procedimiento para acceder a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas:** […] sin establecer distinción entre las líneas conocidas y desconocidas, debemos descifrar el problema siguiendo el orden que muestre, de modo más natural, las relaciones entre esas líneas, hasta que se identifique un medio de expresar una misma cantidad de dos formas: esto es lo que se entiende por ecuación. De esta manera, se pueden recudir todas las cantidades desconocidas a una sola, siempre que el problema pueda ser construido mediante círculos y líneas rectas, secciones cónicas o por medio de cualquier otra línea curva de grado no superior al tercero o cuarto.
375	**Cuáles son los problemas planos:** si el problema puede ser solucionado mediante la geometría ordinaria, esto es, mediante el uso exclusivo de líneas rectas y círculos trazados sobre una superficie plana
388-390	**Las líneas curvas que pueden admitirse en geometría:** líneas curvas a partir de la intersección de líneas rectas y su movimiento, el cual puede ser continuo o por varios movimientos.
414	**Clasificación de todas las curvas en géneros y la relación de sus puntos con los de las rectas:** las líneas curvas geométricas (medida precisa y exacta) tienen necesariamente alguna relación con todos los puntos de una línea recta y esta relación puede ser expresada por alguna ecuación válida para todos los puntos.
407	Curvas de primer género son círculo, parábola, elipse e hipérbola.
414	Curvas de segundo tipo son aquellas que alcanzan el tercer o cuarto grado; las de tercer tipo, las que alcanzan quinto o sexto grado y así sucesivamente hasta el infinito.
407	Definición de lugares planos y sólidos.
412	Líneas curvas que se tranzan hallando varios de sus puntos y que pueden ser admitidas en geometría. Líneas que pueden trazarse utilizando una cuerda y que son admisibles.
430-431	Propiedades de los géneros de óvalos en relación con las reflexiones y refracciones.
442	Definición de las líneas curvas que se deben utilizar en la construcción de cada problema.
Prueba	
393-394-395-396	**Clasificación de todas las curvas en géneros y la relación de sus puntos con los de las rectas,** • Identificación del tipo de curva, dada su construcción, por medio de la ecuación que la representa (curva de primer tipo). • Dada una curva de primer tipo, condiciones para que sea de tercer tipo, cuarto tipo y así hasta el infinito. • Existe una regla general para reducir el cubo en el cuadrado del cuadrado, al supersólido cualquiera del cuadrado del cubo, de modo que la última no debe ser considerada más compleja que la precedente.
Pág. 425 405-406-407	Demostraciones de las afirmaciones del lado recto en cada curva y otras a partir del problema de Pappus con tres o cuatro rectas.
408-409-410	Problema de los antiguos propuesto para cinco líneas (con condiciones determinadas), el punto buscado se encontrará en una curva generada por el movimiento de una parábola.

411	Problema de los antiguos propuesto para cinco líneas (modificando las condiciones), el punto buscado se encontrará en una curva de otra naturaleza.
413	Para hallar las propiedades de las líneas curvas, basta con conocer la relación que guardan sus puntos con los de las rectas, y la forma de trazar otras líneas formando ángulos rectos.
432-433-434	Demostración de propiedades de los géneros de óvalos en relación con las reflexiones y refracciones. • La multiplicación y división de una cantidad a otra cantidad no la altera. • Alteraciones de estas propiedades con los signos + y -.
445	• Número de raíces en cada ecuación. • Raíces falsas. • La reducción del número de dimensiones de una ecuación cuando se conoce alguna de sus raíces.
446	• Determinar si una cantidad dada es el valor de una raíz. • Número de raíces verdaderas que pueden darse en una ecuación.
449	Al aumentar las raíces verdaderas, disminuyen las falsas, y a la inversa.
454	Las raíces, verdaderas o falsas, pueden ser reales o imaginarias.
457	Qué problemas son sólidos cuando la ecuación es cúbica.
476	Razones por las que los problemas sólidos no pueden ser construidos sin las secciones cónicas y aquellos cuya complejidad es mayor sin otras de complejidad creciente.
482-483-484-485	Demostración de las propiedades descritas en 477-478-479-480.
Construcción mecánica	
391-392	Cómo generar líneas curvas más complejas que el círculo a partir del movimiento de líneas rectas que se intersectan (buscando aceptación de dichas rectas desde las especulaciones de la geometría). 

<table>
<tr><td>409</td><td>Sobre la primera y más simple de todas las líneas curvas utilizadas en el problema de los antiguos cuando está propuesto para cinco líneas.

Seguidamente, considero la curva CEG, que imaginó descrita por la intersección de la parábola CKN (moviéndose de modo tal que su eje KL se encuentra sobre la línea recta AB).

</td></tr>
<tr><td>414-415</td><td>Procedimiento general para hallar líneas rectas que corten las curvas dadas o sus tangentes, formando ángulos rectos (caso de la elipse, de la curva generada por el movimiento de una parábola y otras).</td></tr>
<tr><td>416-417-418-419-420-421-422-423</td><td>Cuando los puntos de la línea curva no se relacionan en la forma indicada con los de una recta, sino con los de cualquiera otra imaginable.
Casos en que se modifican las condiciones.
Utilización necesaria de dos raíces diferentes.
Cuando una ecuación tiene dos raíces iguales.
Cuando se busca un solo punto.
El procedimiento permite establecer tantas ecuaciones como cantidades desconocidas supuestas.
Ecuaciones con signos + y –.

</td></tr>
<tr><td>424</td><td>Construcción del problema (proposiciones 416 a 423) en la concoide.</td></tr>
</table>

435-436-437	Construcción de una lente con determinadas propiedades. • Si se dan dos cantidades, implícitamente se conoce su diferencia y se pueden establecer proporciones con las diferencias de otras cantidades.
438-439-440	Construcción de una lente que produzca el mismo efecto (de 435-436-437) guardando la convexidad en una de sus caras, una proporción dada con la de la otra. • Como debería trazarse otra superficie con el fin de que todos los rayos procedentes de un punto dado incidiesen en otro que también fuera dado.
443	Determinación de dos y cuatro medias proporcionales 
444	Determinación de dos medias proporcionales mediante las secciones cónicas que pertenecen a la primera clase.
447	Como pueden convertirse en una ecuación, raíces verdaderas en falsas y viceversa.
448	Aumentar o disminuir el número de raíces de una ecuación sin conocerla.
449	Cómo sacar el segundo término de una ecuación.
451	Procedimiento para lograr que las raíces falsas pasen a ser verdaderas, sin que suceda lo inverso.
452	Procedimiento para completar los diversos lugares de una ecuación. • Multiplicación o división de raíces desconocidas.
453	• Cómo reducir los quebrados en una ecuación. • Cómo establecer una igualdad entre la cantidad conocida de uno de los términos de la ecuación y otra cantidad dada.
455	Cómo reducir las ecuaciones cúbicas cuando el problema es plano.
456	Cómo dividir una ecuación por un binomio que contiene su raíz.

464	Regla general para reducir las ecuaciones que pasan el cuadrado de cuadrado. 
465-466-467-468-469	Forma general de recudir todos los problemas sólidos en una ecuación de tercer o cuarto grado. • Trazado de un círculo, en el caso de que la ecuación dada sea cúbica. • Utilización de signos + y –. • Deducciones de la construcción. • Relación de la media proporcional (bajo condiciones) es igual a una raíz.
474-475	Cómo expresar el valor de todas las raíces de las ecuaciones cúbicas y de todas las bicuadráticas. • Manejo de signos.
477-478-479-480	Procedimiento general para construir todos los problemas reducidos a una ecuación no superior al grado sexto. • Tal regla debe permanecer conectando ambos puntos mientras asciende o desciende la parábola sobre la línea. • De modo que las perpendiculares trazadas desde estos puntos sobre la línea serán las raíces buscadas sin que exista excepción o fallo alguno, dada la aplicación de esta regla. 

Demostración-construcción	
380-381-382-383-384-385-386-387	**Demostración y construcción del teorema de Pappus** • Cómo deben establecerse los términos para alcanzar la ecuación en este ejemplo (problema de Pappus). • La única excepción será cuando las líneas dadas sean paralelas a la línea *AB*. • Modo de hallar que el problema es plano cuando no se ha propuesto para más de cinco líneas. • Y aunque tengamos hasta nueve líneas dadas, con tal de que no todas sean paralelas, puede siempre lograrse que la ecuación no sobrepase el cuadrado del cuadrado.
397	**Explicación del teorema de Pappus** • Cuando no han sido tomadas más de ocho líneas rectas. • Cuando no han sido tomadas más de doce líneas rectas (y así sucesivamente para otros casos).
	Método para descubrir la línea curva en cada caso a partir de tres o cuatro rectas, demostrando así que el primer tipo de curvas no admite sino a las secciones cónicas y al círculo. • Alteración de signos en las ecuaciones de las curvas. • Sustituciones de expresiones por una letra. • Distintas posiciones del punto en cuestión a partir de los valores de las expresiones. • Determinación de la curva a partir de su signo.
458-459	La reducción de las ecuaciones con cuatro dimensiones cuando el problema es plano y cuando el problema es sólido.
460-461	Conocer todas las raíces de la ecuación propuesta y, en consecuencia, construir el problema cuya solución se expresa, no es necesario utilizar sino círculos y líneas rectas. • Cuando no se encuentran raíces verdaderas ni falsas, se deduce que las cuatro raíces de la ecuación original son imaginarias.
470	Cómo determinar dos medias proporcionales.
471	Cómo trisecar un ángulo.
472-473	Reducción de los problemas sólidos a la determinación de dos medias proporcionales o a la trisección de un ángulo.
425-426	**Primer óvalo y segundo óvalo:** construir óvalos de mayores o menores dimensiones, construcción de un círculo que corta a otro de los del mismo óvalo.
427-428	Construcción del tercer óvalo y cuarto óvalo.
429	Condiciones para que los óvalos de primer género sean rectas; los óvalos de segundo género, todas las posibles hipérbolas; los óvalos de cuarto género, todas las posibles elipses.
441	Aplicaciones de 438-439-440 sobre las líneas curvas trazadas sobre una superficie plana, a las que se describen en un espacio con tres dimensiones.
462-463	Aplicaciones de las reducciones (458-459-460-461).

Al tomar la disección por las unidades, se puede determinar, en la primera unidad de análisis, que las definiciones que se realizan durante el texto permiten evidenciar un camino a seguir en términos de la representación de curvas a partir de elementos básicos que se convierten en fundamentales; el rompimiento de la homogeneidad se permea en las definiciones sobre las curvas a través de la relación de las líneas curvas con los puntos que se generan a partir del movimiento de líneas rectas. El hecho de que la operación producto entre segmentos genere un segmento permite hacer relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas; de esta manera, la idea de esta línea recta (la que se genera en el rompimiento de la homogeneidad) es transversal al documento.

Respecto a la segunda unidad, prueba, se concluye que los aspectos que se quieren trabajar hacen referencia a la existencia y clasificación de curvas; los planteamientos iniciales, esencialmente los del libro uno e inicios del libro dos, son más retóricos y están armados de tal forma que las justificaciones sobre la mecánica van desapareciendo para dar inicio y luego consolidación a las representaciones simbólicas a partir de ecuaciones, de los problemas propuestos por el autor.

En la tercera unidad, se determina el planteamiento de los instrumentos mecánicos o compases con el fin de determinar la existencia de la curva a partir de la posibilidad de trazo de los puntos que pertenecen a ella; en este proceso se hace muestra de los compases, pero no necesariamente todos los sitios del documento que hablan de una curva mecánica hacen uso de alguno de ellos; en esencia, se habla del movimiento a partir de una intersección de curva y esto permite caracterizar los puntos que pertenecen a ella.

Se reconoce que los puntos que conforman la curva son descritos a partir de segmentos que están relacionados y que permiten definirla; es decir, la base fundamental de las construcciones mecánicas termina siendo la relación entre segmentos que definen puntos de curvas. La curva aparece como un conjunto de puntos que cumplen una condición dada; para el caso de las cónicas, el conjunto de puntos es descrito a partir de la consecución de una de las propiedades propuestas por Apolonio. Es decir, se parte de la cónica como objeto geométrico, de su definición a partir de proporciones, para generar un modelo que ahora me permita verla de manera analítica.

En la cuarta unidad de análisis, se desarrollan las pruebas a partir de la construcción de dos aspectos: puntos que pertenecen a una curva, por medio de representaciones pictóricas, y la construcción de la representación simbólica de la relación entre los puntos, lo que genera una ecuación que posibilita representar la relación entre los puntos con la herramienta del álgebra. A partir de ahí se evidencia un trabajo que puede considerarse como el estudio de la curva; mejor, de elementos fundamentales de ella, como lo son sus raíces. Aparece la curva como objeto de análisis; epistemológicamente, el papel que se le otorga a la representación simbólica va aumentando hasta que se permite que la manipulación de este tipo de escritura se transforme, al punto de poder decir sobre aspectos de la curva.

Esta primera separación de información del texto a partir de las unidades de análisis permite evidenciar que existen algunos otros elementos en los cuales debe ser reorganizado el documento y que permiten obtener información puntual. Al analizar la información dispuesta, se observa que las palabras “curva” y “ecuación” aparecen en cada una de las unidades de análisis utilizadas anteriormente, tanto en términos de definición como de justificación, como en la construcción mecánica; de esta manera, creemos que es ilustrativo para la descripción que queremos realizar hacer una disección del texto por estas subunidades de análisis: curva, ecuación, ecuación-curva.

Las frases o conclusiones sobre un apartado del texto para cada una de las subunidades hacen referencia a fragmentos del texto donde se usa la palabra o la relación para determinar algún asunto respecto a él mismo, no consideramos frases en donde la palabra o relación esté puesta de otra manera. A continuación se presenta la nueva organización.

Tabla 3. Análisis subcategorías

Curva	
388-389-390 Libro segundo	Las líneas curvas que pueden admitirse en geometría. Discusión sobre las curvas mecánicas y su validez en el cuerpo de las matemáticas como curvas.
391-392 Libro segundo	Cómo generar líneas curvas más complejas que el círculo a partir del movimiento de líneas rectas que se intersectan.
393 Libro segundo	Clasificación de todas las curvas en géneros y la relación de sus puntos con los de las rectas. Asimismo, la línea curva será del primero y más simple tipo, en el que no están comprendidos sino el círculo, la parábola, la hipérbola y la elipse.
395 Libro segundo	Dada una curva de primer tipo, condiciones para que sea de tercer, tipo, cuarto tipo y así hasta el infinito. Estas afirmaciones son fácil de probar mediante el cálculo. Y de cualquier otra forma que se imagine la descripción de una curva, siendo del número de las que son llamadas geométricas, siempre se podrá hallar una ecuación para determinar de este modo todos sus puntos.
396 Libro segundo	Pero es preciso señalar que entre las líneas de cada uno de estos géneros, aunque la mayor parte de ellas tenga la misma complejidad, de modo tal que puedan servir para determinar los mismos puntos y construir los mismos problemas, sin embargo, hay siempre algunas más simples cuya utilidad es más limitada. Así entre las del primer tipo, además de la elipse, la parábola y la hipérbola, cuya complejidad es la misma, también está incluido el círculo que es obviamente una curva más simple. Entre las de segunda clase, se encuentra la concoide vulgar que toma su origen del círculo y algunas otras que, aunque no tengan una utilidad tan amplia como la mayor parte de las de su clase, sin embargo, no pueden ser consideradas pertenecientes al primer tipo.
Pág. 414 Libro segundo	Clasificación de todas las curvas en géneros y la relación de sus puntos con los de las rectas: las líneas curvas geométricas (medida precisa y exacta) tienen necesariamente alguna relación con todos los puntos de una línea recta y esta relación puede ser expresada por alguna ecuación válida para todos los puntos.
Pág. 414 Libro segundo	Curvas de primer tipo son círculo, parábola, elipse e hipérbola.
Pág. 414 Libro segundo	Curvas de segundo tipo son aquellas que alcanzan el tercer o cuarto grado; las de tercer tipo, las que alcanzan quinto o sexto grado, y así sucesivamente hasta el infinito.

397 Libro segundo	Explicación del teorema de Pappus • Cuando no han sido tomadas más de ocho líneas rectas. • Cuando no han sido tomadas más de doce líneas rectas (y así sucesivamente para otros casos).
412 Libro segundo	Líneas curvas que se trazan hallando varios de sus puntos y que pueden ser admitidas en geometría. Líneas que pueden trazarse utilizando una cuerda y que son admisibles.
413 Libro segundo	Para hallar las propiedades de las líneas curvas, basta con conocer la relación que guardan sus puntos con los de las rectas, y la forma de trazar otras líneas formando ángulos rectos.
429 segundo libro	Condiciones para que los óvalos de primer género sean rectas; los óvalos de segundo género, todas las posibles hipérbolas; los óvalos de cuarto género, todas las posibles elipses.
430-431 Libro segundo	Propiedades de los géneros de óvalos en relación con las reflexiones y refracciones.
434 Libro segundo	Alteraciones de estas propiedades (432, 433) con los signos + y -.
442 Libro tercero	Definición de las líneas curvas que se deben utilizar en la construcción de cada problema.
476 Libro tercero	Razones por las que los problemas sólidos no pueden ser construidos sin las secciones cónicas y aquellos cuya complejidad es mayor sin otras de complejidad creciente. Por ello creo realizar lo mejor si facilito una regla general para construirlos, empleando la línea curva que se describe por la intersección de una parábola y una línea recta de la forma ya explicada. Me atrevo a afirmar que no hay otra más simple en la naturaleza que pueda contribuir a tal efecto y se ha visto cómo sigue a las secciones cónicas en esta cuestión tan estudiada por los antiguos y cuya solución muestra por orden todas las líneas curvas que deben ser recibidas en geometría.
Ecuación	
373 Libro primero	[…] sin establecer distinción entre las líneas conocidas y desconocidas, debemos descifrar el problema siguiendo el orden que muestre, de modo más natural, las relaciones entre estas líneas, hasta que se identifique un medio de expresar una misma cantidad de dos formas: esto es lo que se entiende por ecuación, pues los términos de una de estas expresiones son iguales a los de la otra.
375 Libro primero	**Cómo se resuelve un problema plano**, de la forma $z^2 = az + bb$ con z como incógnita.
376 Libro primero	**Cómo se resuelve un problema plano**, de la forma $z^2 = az + bb$ con z como incógnita.
380-381-382-383-384-385-386-387 Libro primero	**Demostración y construcción del teorema de Pappus**, para tal fin, Descartes recurre a su método, lo cual implica la utilización de ecuaciones durante todo su desarrollo.
403-404 Libro segundo	Determinación de ecuaciones del lado recto en cada curva y otras a partir del problema de Pappus con tres o cuatro rectas.
414-415 Libro segundo	Procedimiento general para hallar líneas rectas que corten las curvas dadas o sus tangentes, formando ángulos rectos (caso de la elipse, de la curva generada por el movimiento de una parábola y otros).

416-417-418-419-420-421-422-423 Libro segundo	Cuando los puntos de la línea curva no se relacionan en la forma indicada con los de una recta, sino con los de cualquiera otra imaginable. • Casos en que se modifican las condiciones. • Utilización necesaria de dos raíces diferentes. • Cuando una ecuación tiene dos raíces iguales. • Cuando se busca un solo punto. • El procedimiento permite establecer tantas ecuaciones como cantidades desconocidas supuestas. • Ecuaciones con signos + y -.
432-433 Libro segundo	Demostración de propiedades de los géneros de óvalos en relación con las reflexiones y refracciones. • Multiplicación y división de una cantidad a otra cantidad no la altera. • Alteraciones de estas propiedades con los signos + y -.
441 Libro segundo	Aplicaciones de 438-439-440 sobre las líneas curvas trazadas sobre una superficie plana, a las que se describen en un espacio con tres dimensiones.
445 Libro tercero	• Número de raíces en cada ecuación. • Raíces falsas. • La reducción del número de dimensiones de una ecuación cuando se conoce alguna de sus raíces. Es evidente, a partir de lo expuesto, que la ecuación que tiene varias raíces es siempre divisible por un binomio formado por la cantidad desconocida menos el valor de una de las raíces verdaderas, o más el valor de una de las raíces falsas. De este modo, pueden ser reducidas las dimensiones (el grado) de una ecuación.
446 Libro tercero	• Determinar si una cantidad dada es el valor de una raíz. • Número de raíces verdaderas que pueden darse en una ecuación.
447 Libro tercero	Cómo pueden convertirse en una ecuación, raíces verdaderas en falsas y viceversa.
448 Libro tercero	Aumentar o disminuir el número de raíces de una ecuación sin conocerla.
449 Libro tercero	Aumentando las raíces verdaderas disminuyen las falsas y a la inversa.
450 Libro tercero	Cómo sacar el segundo término de una ecuación.
451 Libro tercero	Procedimiento para lograr que las raíces falsas pasen a ser verdaderas, sin que suceda lo inverso.
452 Libro tercero	Procedimiento para completar los diversos lugares de una ecuación • Multiplicación o división de raíces desconocidas.
453 Libro tercero	• Cómo reducir los quebrados en una ecuación. • Cómo establecer una igualdad entre la cantidad conocida de uno de los términos de la ecuación y otra cantidad dada.
454 Libro tercero	Las raíces, verdaderas o falsas, pueden ser reales o imaginarias.

455 Libro tercero	Cómo reducir las ecuaciones cúbicas cuando el problema es plano.
456 Libro tercero	Cómo dividir una ecuación por un binomio que contiene su raíz.
457 Libro tercero	Qué problemas son sólidos cuando la ecuación es cúbica.
458-459 Libro tercero	La reducción de las ecuaciones con cuatro dimensiones cuando el problema es plano y cuando el problema es sólido.
460-461 Libro tercero	Conocer todas las raíces de la ecuación propuesta y, en consecuencia, construir el problema cuya solución es expresa, no es necesario utilizar sino círculos y líneas rectas. • Cuando no se encuentran raíces verdaderas ni falsas, se deduce que las cuatro raíces de la ecuación original son imaginarias.
462-463 Libro tercero	Aplicaciones de las reducciones (458-459-460-461).
464 Libro tercero	Regla general para reducir las ecuaciones que pasan el cuadrado de cuadrado.
465-466-467-468-469 Libro tercero	Forma general de recudir todos los problemas sólidos en una ecuación de tercer o cuarto grado. • Trazado de un círculo, en el caso de que la ecuación dada sea cúbica. • Utilización de signos + y –. • Deducciones de la construcción. • Relación de la media proporcional (bajo condiciones), que es igual a una raíz.
470 Libro tercero	Cómo determinar dos medias proporcionales.
471 Libro tercero	Cómo trisecar un ángulo.
472-473 Libro tercero	Reducción de los problemas sólidos a la determinación de dos medias proporcionales o a la trisección de un ángulo.
474-475 Libro tercero	Cómo expresar el valor de todas las raíces de las ecuaciones cúbicas y de todas las bicuadráticas. • Manejo de signos.
Curva y ecuación	
394 Libro segundo	Identificación del tipo de curva, dada su construcción, por medio de la ecuación que la representa (curva de primer tipo).
398-399-400-401-402 Libro segundo	(Condiciones en la ecuación para caracterizar una curva). Método para descubrir la línea curva en cada caso a partir de tres o cuatro rectas demostrando así que el primer tipo de curvas no admite sino a las secciones cónicas y al círculo. • Alteración de signos en las ecuaciones de las curvas. • Sustituciones de expresiones por una letra. • Distintas posiciones del punto en cuestión a partir de los valores de las expresiones. • Determinación de la curva a partir de su signo.

408-409-410 Libro segundo	Problema de los antiguos propuesto para cinco líneas (con condiciones determinadas), el punto buscado se encontrará en una curva generada por el movimiento de una parábola.
411 Libro segundo	Problema de los antiguos propuesto para cinco líneas (modificando las condiciones), el punto buscado se encontrará en una curva de otra naturaleza.
477-478-479-480 Libro tercero	Procedimiento general para construir todos los problemas reducidos a una ecuación no superior al grado sexto. • Tal regla debe permanecer conectando ambos puntos mientas asciende o desciende la parábola sobre la línea. • De modo que las perpendiculares trazadas desde estos puntos sobre la línea serán las raíces buscadas sin que exista excepción o fallo alguno, dada la aplicación de esta regla.
481-482-483-484-485 Libro tercero	Demostración de las propiedades descritas en 477-478-479-480.

Después de esta nueva organización, se puede afirmar, respecto a la subunidad de análisis curva, que Descartes se apoya en esta noción para plantear un método de solución de problemas geométricos que permite la verificación, validación y validez de las matemáticas. De esta manera, es posible dar solución a los problemas geométricos conocidos hasta el momento; por ejemplo, se plantea una solución de la trisección del ángulo. De igual manera, se observa el reconocimiento de criterios de rigor e intenciones de generalización a través de la creación de una taxonomía para las curvas, aspecto que, desde nuestra percepción, pone de juego una actividad de rigor y validación de este objeto para las matemáticas.

En este sentido, podemos afirmar que inicialmente construye una retórica sobre la importancia de entender las curvas mecánicas como parte de las matemáticas, ya que su construcción y exactitud se pueden verificar por medio de la geometría antigua y, por tanto, la instrumentalización de la representación no diferiría de la que se realiza con un compás para realizar una circunferencia.

Al analizar los fragmentos en donde se habla de la noción de curva, se ve una organización intencional de complejización del asunto, que lo podemos dividir en dos fases: la primera consiste en justificar o aclarar el uso de curvas para la solución de problemas geométricos, parte de este trabajo incluye la resolución del problema de Pappus, el cual hasta ahí lo vemos como un ejemplo de las posibilidades que tiene la nueva técnica que propone para la solución de problemas. La segunda trabaja con la organización y creación de curvas en el cuerpo de conocimiento que está creando; es decir, no trabaja en relación con la técnica, sino con la validez y organización de las curvas como objeto matemático; con este propósito trabaja en el libro tres.

Respecto a la segunda subunidad de análisis, se identifica en la obra que son las ecuaciones la herramienta que utiliza Descartes para conformar el análisis de curvas. Inicialmente, construye un método que le permite armar ecuaciones usando cantidades conocidas y desconocidas (aspecto que históricamente se encuentra en los trabajos de Vieta) para luego dar inicio a la solución de situaciones de tipo geométrico, el problema de Pappus y al análisis de aspectos de las propias curvas, en esencia a las raíces de polinomios.

Al revisar el libro tres, se analiza el tipo de elementos de las curvas que es posible analizar a partir de ecuaciones, y las conclusiones de estos son cercanas a lo que hoy conocemos como el teorema fundamental del álgebra y el teorema del factor. Sin embargo, lo que parece más valioso en la revisión transversal del uso de ecuaciones es que la misma herramienta que utiliza para resolver los problemas la usa para analizar las curvas desde el punto de vista matemático, aspecto que otorga dos dimensiones a la herramienta ecuación en la obra: para resolución de problemas y para conocer aspectos internos de la propia curva.

Respecto a la tercera subunidad de análisis, podemos decir que confirma los aspectos epistemológicos propuestos en las dos subunidades anteriores; la relación curva-ecuación se encuentra generalmente en la pretensión de generalización de los problemas (en especial en Pappus) y en la prueba de generalización de la clasificación de curva. Vale la pena hacer referencia a un aspecto que por el tipo de pretensiones de este estudio parece importante: en la *Geometría* no se encuentra la relación contraria ecuación-curva; este aspecto nos parece relevante en el estudio del texto, pues evidencia un valor epistemológicamente diferente para los dos tipos de representación, y es más relevante la posibilidad de instrumentar o dibujar las relaciones dadas y que se pueden deducir de los problemas para luego ser configuradas a partir de relaciones.

En los apartados que se seleccionaron para esta relación, se evidencia la importancia que el autor otorga a la representación de los puntos de la curva por medio de la construcción geométrica; al igual que Bos (2001), creemos que se puede hablar de la construcción de una ecuación, aspecto que se convierte en fundamental para entender la transición que el autor hace de la curva a la ecuación.

Como parte de la importancia que acontece en la obra alrededor de la noción de curva y con el fin de localizar las cónicas dentro del texto, se realizó un análisis para estas curvas. La importancia de realizar esta tarea consiste en que las cónicas fueron tratadas en la Antigüedad desde el punto de vista geométrico en la obra de Apolonio de Perga; con este cimiento estos objetos son tratados dentro de la obra; por lo tanto, el análisis de estas curvas en la obra permite evidenciar con mayor claridad la relación curva-ecuación.

Tabla 4. Análisis cónicas

Curva	Frase
Parábola	
402	**Solución al problema de Pappus propuesto para tres o cuatro líneas** A saber si el término $\frac{p}{m}x^2$ tiene valor cero, entonces tal sección cónica será una parábola. Y si esta sección es una parábola, su lado recto es igual $\frac{oz}{a}$ y su eje se encuentra siempre sobre la línea IL… por este medio es fácil encontrar esta parábola de acuerdo con el primer problema del libro primero de Apolonio.
408	Si el problema de los antiguos fuese propuesto para cinco líneas de modo que cuatro de ellas sean paralelas y la quinta sea perpendicular a las otras cuatro […], entonces el punto que buscamos debe encontrarse en una línea curva descrita por el movimiento de una parábola.
415	**Relación entre "x" y "y"** Si CE es una curva generada por el movimiento de una parábola […], entonces la ecuación que expresaría la relación entre "x" y "y" sería: $y^3 - by^2 - cdy + bcd + dxy = 0$
464	**Forma general de reducir todos los problemas sólidos en una ecuación de tercer o cuarto grado:** "[…] me sentiré satisfecho en este lugar con facilitar solamente una regla para encontrarlas todas por medio de una parábola puesto que, en cierto modo, es la más simple de estas curvas".
485	Sin embargo, es necesario resaltar que en diversos casos puede suceder que el círculo corte tan oblicuamente a la parábola de segundo género que el punto de intersección sea difícilmente determinable; en consecuencia, tal construcción no sería cómoda desde el punto de vista práctico.
Elipse	
401 402	Solución al problema de Pappus propuesto para tres o cuatro líneas A saber, si el término $-\frac{p}{m}x^2$ es diferente de cero y negativo, entonces tal sección cónica será una elipse. Si el problema es una elipse o un círculo, es necesario determinar el punto *M* y si m^2 es positivo, el lado recto de la figura sería $\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2} + \frac{ampz^2}{a^2}}$.
415	Relación entre "x" y "y" Si *CE* es una elipse y *MA* el segmento de su eje, correspondiéndole *CM*, *r* su lado recto y *q* su eje transversal, entonces mediante el teorema 13 del libro primero de Apolonio tenemos que $x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$ … entonces dicha relación es: $y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r} = 0$, pues, en este caso, es preferible considerar conjuntamente la expresión que establecer una igualdad entre sus partes.

Hipérbola	
395	Por lo tanto, la ecuación buscada es $y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$ En virtud de esta, conocemos que la línea *EC* es de primer tipo; en efecto, no es sino una hipérbola.
401	**Solución al problema de Pappus propuesto para tres o cuatro líneas** A saber, si el término $\frac{p}{m}x^2$ es diferente de cero y positivo, entonces tal sección cónica será una hipérbola. Si el problema es una hipérbola o un círculo, es necesario determinar el punto *M* y si m^2 es negativo, el lado recto de la figura sería $\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2} - \frac{4mpz^2}{a^2}}$.
Parábola, elipse, hipérbola	
393	Asimismo, la línea curva será del primero y más simple tipo, en el que no están comprendidos sino el círculo, la parábola, la hipérbola y la elipse.
397	**Solución al problema de Pappus propuesto para tres o cuatro líneas** Es necesario proceder a indicar con más precisión el método para descubrir la línea curva buscada en cada caso, cuando no son dadas sino tres o cuatro líneas rectas; tal análisis mostrará que la clase primera no contiene otras líneas que las tres secciones cónicas (parábola, elipse, hipérbola) y el círculo.
Pág. 428	**Solución al problema de Pappus propuesto para tres o cuatro líneas** Si esta línea es recta o circular (la línea pedida en el problema), se dice que se trata de un lugar plano; pero si es una parábola, una hipérbola o una elipse, entonces se dice que se trata de un lugar sólido.

En este complemento del análisis anterior respecto a curva, ecuación y curva-ecuación, podemos inferir que las cónicas hacen parte del acervo de aspectos que tuvo en cuenta Descartes para poder solucionar problemas y hablar de curvas. En efecto, se identifican las definiciones de Apolonio como el principio fundamental con el cual se posibilita llegar a una ecuación de estas curvas; en esencia, vemos que en la conformación de la ecuación que trabajan (Descartes, 1996, p. 395), se usa la definición por proporciones propuesta por Apolonio.

Sin embargo, es visible que en los tres libros se habla en especial de la parábola, pero no necesariamente para decir una propiedad específica de ella, sino más bien como herramienta para analizar curvas de grado superior o determinar algunos problemas. Se toma la parábola como instrumento para analizar otros comportamientos del movimiento, mas no para determinar propiedades estrictamente relacionadas con la parábola o con las otras secciones cónicas.

En este análisis de contenido de tipo descriptivo, se realizaron disecciones del texto a partir de aspectos que los historiadores han planteado para la obra matemática de Descartes; las relaciones que podemos inferir son:

- El texto presenta frases que pueden ser análogas a definiciones en donde el autor construye una mirada de la operación producto que se convierte en vertebral para el desarrollo de la noción de curva. Inicialmente, construye de manera retórica la relación entre problema geométrico-instrumento-ecuación y luego la comienza a desarrollar, esencialmente en la solución del problema de Pappus.
- No se evidencia el uso de representaciones simbólicas de curvas sin estar relacionadas con la solución de algún problema geométrico; en especial, el problema de Pappus es ejemplo de esta relación. Se podría decir que la solución de problemas en el texto se da de la siguiente manera: problema, solución geométrica (en la cual puede aparecer instrumentalización), representación gráfica de curva y representación simbólica.
- El objeto matemático privilegiado es la curva y sus representaciones; el texto muestra problemas en donde los puntos de algunas curvas se consideran solución de la situación, desenvolviendo un proceso heurístico que permite llegar a la representación simbólica. La doble interpretación que se puede realizar de las ecuaciones tanto como producto de las construcciones geométricas y la intersección de curvas permite identificar la importancia de este tipo de expresiones, pero también su dependencia de las construcciones geométricas; podemos decir que su existencia depende de lo válido que sea la construcción.
- Durante la obra, se puede determinar que el autor interpreta la curva de varias formas: a partir de puntos, como el movimiento de una curva respecto a otra y como objeto matemático, razón por la cual es posible su clasificación.

Conclusiones del análisis para la formación de profesores

Para obtener las conclusiones de este análisis, tendremos en cuenta los aspectos planteados en el capítulo 2 respecto al conocimiento didáctico del profesor; se realizan las inferencias necesarias que son suministro para el trabajo que se describe en el siguiente capítulo, en una experiencia con los estudiantes.

De acuerdo con las actividades que se plantearon para CCK, podemos concluir que el conocimiento de la obra matemática de Descartes podría potencializar los siguientes aspectos:

Tabla 5. Actividades CCK

Actividad de la práctica en la perspectiva de la resolución de problemas	Aspectos posibles para trabajar con los estudiantes
Descubrimiento	La diferencia de este tipo de trabajo respecto al trabajo de los antiguos, en especial de Euclides. La relación entre la geometría euclidea y la posibilidad de comprender la generación de puntos de una curva a partir de describir segmentos en un referente cartesiano posibilita comprender el significado de que una curva se componga por puntos; de igual manera, comprender que una curva se puede considerar solución de un problema. • Descubrir relaciones entre formas de representación asociadas a las construcciones geométricas diferentes a las de la geometría griega antigua. • Expresiones algebraicas que hacen intervenir las curvas en una variedad de situaciones asociadas a construcciones geométricas. • Ampliar la visión frente al vínculo entre geometría y álgebra; establecimiento de relaciones para la solución de problemas. • Intervención de instrumentos mecánicos en el proceso de solución de situaciones geométrico-algebraicas.
Explicación	La posibilidad de expresar ideas matemáticas en la relación curva-ecuación. La identificación de aspectos relacionados con la instrumentalización de relaciones matemáticas a partir del uso del movimiento. Cada una de las expresiones algebraicas obtenidas están argumentadas en términos de las relaciones geométricas presentes en la situación; es fundamental el trabajo inicial entre magnitudes que le permiten llegar a expresar simbólicamente las relaciones.
Formulación	Reconocer una nueva forma de trabajo en matemáticas, compuesta por el problema geométrico-instrumentalización- ecuación, que aunque es muy usual, es necesario que el profesor de matemáticas la reconozca como diferente a la que se asume en la aritmética o la geometría. El proceso de resolución de la situación trae consigo el propósito de emplear expresiones algebraicas para interpretar las relaciones geométricas presentes en la construcción; para realizar esto, Descartes define en su método una estrategia fundamental: suponer que el problema está resuelto, esto le permite establecer las relaciones entre las diferentes representaciones asociadas a la situación para llegar a sus soluciones.

Aplicación	El profesor de matemáticas debería identificar y reconocer una forma de proceder en la solución de problemas geométricos, al igual que debería considerar la generación de curvas a partir de la intersección de otro tipo de curvas, este aspecto lo vemos como fundamental en la posibilidad de comprensión de aspectos que fundamentaron la teoría de curvas algebraicas. Es importante reconocer que Descartes hace de su método una herramienta fundamental en el análisis de situaciones geométricas, el uso de ecuaciones algebraicas, de curvas algebraicas y de instrumentos mecánicos, además del tratamiento de las mismas situaciones en el proceso de resolución, que emergen como herramientas y estrategias para analizar cualquier tipo de situación problema de carácter geométrico, por esto extrapola su método y sus herramientas en el tratamiento de diversas situaciones geométricas.
Justificación	Respecto a aspectos relacionados con las justificaciones de algunas de las frases o definiciones que componen el texto y, sobre todo, su importancia histórica, creemos que identificar el papel que cumple para esta forma de análisis de problemas geométricos la ruptura de la homogeneidad que tiene el trabajo de Euclides y el desarrollo de relaciones entre cantidades de magnitud desconocidas y conocidas, las cuales terminan configuradas en ecuaciones, proporciona el ambiente propicio para preguntarse por el papel de la simbolización en el método de solución de problemas geométricos. Comprender que las ecuaciones se convierten en una forma de representar las relaciones que se establecen en un problema geométrico. El tratamiento del problema de Pappus y de otros problemas geométricos lleva a Descartes a establecer criterios generales de clasificación de las curvas a partir de sus expresiones algebraicas asociadas; este criterio general se puede plantear como una proposición, para la cual Descartes hace un tratamiento para presentarla en el marco del descubrimiento de la relación aplicada a situaciones específicas, pero no requiere de un proceso demostrativo para presentar el criterio.

La siguiente tabla muestra los aspectos que consideramos trabajar respecto a las actividades asociadas al SCK.

Tabla 6. Actividades SCK

Actividad de la práctica	Aspectos posibles a trabajar con los estudiantes
Descubrimiento	Analizar los usos y significados de las representaciones de curvas. Analizar el tipo de problemas que se pueden resolver a partir del trabajo algebraico.
Explicación	Comprender cuáles son las diferencias que existen entre los trabajos euclidianos y los realizados por Descartes. A partir del método de Descartes, comprender cómo es posible resolver un problema algebraico. El tipo de interpretación del álgebra se puede evidenciar en la forma de solucionar problemas algebraicos. La interpretación de curva que se favorece al resolver problemas algebraicos desde el método que presenta Descartes en la *Geometría*.
Formulación	El papel de la letra en el desarrollo del trabajo de Descartes, cuál es el medio que propone como herramienta para la solución de problemas geométricos. Existe un método o una heurística que permita plantear y desarrollar el problema de manera distinta a la Antigüedad.
Representación	Cómo se realizan las traducciones: problema geométrico-construcción de curva. Construcción de curva-representación algebraica. Problema geométrico-representación algebraica. El papel que cumple cada una de las representaciones para la resolución de problemas algebraicos.

Capítulo 5. Una experiencia en la formación de profesores

Este capítulo presenta una experiencia con estudiantes de LEBEM de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, ubicada en la ciudad de Bogotá, Colombia. La intervención se realizó teniendo en cuenta los aspectos planteados durante los capítulos anteriores; por tanto, se tomaron el trabajo propuesto por Descartes en la *Geometría* y las descripciones de las actividades realizadas alrededor de la práctica propuesta en esta obra.

Se intervinieron dos espacios académicos: Didáctica del Álgebra y Problemas del Álgebra Geométrica, que se proponen para el cuarto semestre de la carrera. Para realizar la propuesta, se planteó un instrumento en cada espacio, el cual giraba alrededor de un problema que, creemos, posee las características para poner en discusión los aspectos matemáticos y didácticos propuestos en las tablas 5 y 6.

Para efectos de la organización del capítulo, se presentan el trabajo realizado en el curso Problemas del Álgebra Geométrica y luego los acontecimientos del curso de Didáctica del Álgebra.

Es importante resaltar que, en la perspectiva de materializar un trabajo con estudiantes para profesor de matemáticas, a través de la intervención de la historia, las actividades deben estar relacionadas entre sí; es decir, no se trata de un recurso cerrado para cada espacio de formación, sino de una misma actividad que tiene la característica de presentarse desde un análisis didáctico y también desde un análisis de las estrategias y desarrollos matemáticos que puede lograr el profesor en formación.

Problemas del Álgebra Geométrica

El curso Problemas del Álgebra Geométrica, de cuarto semestre, se encuentra adscrito al proyecto curricular LEBEM, en uno de sus ejes de formación, denominado Eje de Problemas y Pensamiento Matemático Avanzado (EPPMA); por este motivo, el eje articulador del curso es la resolución de problemas en el marco de las situaciones que promuevan y discutan las posibles relaciones entre el álgebra y la geometría, junto con sus diversas representaciones y esquemas relacionados, en desarrollos específicos y generales.

Es importante tener en cuenta que, desde la perspectiva de la formación de profesores, el tratamiento de heurísticas asociadas a una situación específica permite interpretar, validar y discutir sobre las relaciones algebraicas en contextos geométricos y sus diversas representaciones; por esto, es necesario analizar y reflexionar acerca de las situaciones problema que se pueden proponer en el curso, pues es allí donde será posible lograr un trabajo de construcción de significados sobre el álgebra geométrica.

Desde el punto de vista de las discusiones actuales en torno a la enseñanza del álgebra, en el año 2011 el proyecto curricular LEBEM finalizó un análisis sobre las relaciones de conectividad, complejidad y conexidad entre los espacios académicos de cada uno de los ejes de formación (referenciados anteriormente) para el caso del espacio Problemas de Álgebra Geométrica; se referencian autores como Butto y Rojano (2004), quienes señalan que tradicionalmente el camino más común para abordar el concepto de álgebra radica en enseñar la sintaxis algebraica, haciendo énfasis en su manipulación.

Así, para estos autores, "se empieza por enseñar las expresiones, ecuaciones y toda la manipulación alrededor de ellas y se termina con la resolución de problemas mediante la aplicación del contenido sintáctico aprendido" (2004, p. 9). Cabe señalar que este camino demanda a los estudiantes un fuerte trabajo con símbolos desprovistos de significado y sentido.

Desde lo propuesto en el proyecto curricular LEBEM, uno de los caminos que contribuye en la consolidación de actividades que potencian el desarrollo del pensamiento en torno al álgebra geométrica en los estudiantes es la intervención de la historia como un elemento que permite al profesor de matemáticas una discusión sobre las herramientas algebraicas a partir de la geometría y una resignificación de algunos de los conocimientos algebraicos construidos, a partir del tratamiento y la comprensión de situaciones históricas; es así como desde el planteamiento del curso, su justificación plantea:

> Buena parte de lo que hoy conocemos como álgebra se gestó en el ámbito de problemas geométricos y de búsquedas humanas, en diferentes culturas, para dar solución a problemas tanto de orden práctico como abstracto. Partiendo de algunos problemas históricos, proponemos un acercamiento al álgebra de corte más reflexivo, que permita vislumbrar las diferentes formas de tratamiento propuesto en las diferentes culturas y, a partir de allí, posibilitar tanto la resignificación de algunos de los conocimientos algebraicos adquiridos principalmente durante el bachillerato, como el reconocimiento de limitaciones en el conjunto numérico subyacente. Para ello se

pretende centrar la mirada sobre el concepto ecuación, estudiando su evolución e implicaciones principalmente para el álgebra y la geometría desde su desarrollo histórico. Además de reflexionar sobre cuestionamientos como:

1. ¿Qué situaciones histórico-matemáticas o matemáticas desencadenan el conocimiento propio del espacio de formación, y cómo desarrollarlas?
2. ¿Cómo a través de la resolución de problemas pueden desarrollarse las temáticas pertenecientes al álgebra geométrica?
3. ¿Qué instrumentos permiten evidenciar los procesos lógico-matemáticos relativos a los contenidos del curso? (Programa de la Asignatura, s. f., p. 2)

En este sentido, un lugar primordial para la construcción de situaciones asociadas a los procesos de interpretación, comprensión y análisis de las situaciones geométricas, haciendo uso de herramientas algebraicas, es la historia, pues es allí donde se pueden evidenciar relaciones geométricas que fundamentan el trabajo del álgebra escolar. Igualmente, desde los objetivos del espacio de formación, se reconoce esta importancia, haciendo hincapié en la resolución de problemas desde el álgebra geométrica a partir del uso de herramientas históricas:

- Abogar a la historia y a la filosofía para reflexionar sobre el devenir de la naturaleza, la construcción, la aritmética, la logística y el cálculo del álgebra, y para modificar el tratamiento que se hace de ello en contraste con abordajes tradicionales del álgebra escolar.
- Promover en los estudiantes el uso del lenguaje matemático adecuado y la búsqueda de elementos que le permitan comunicar y validar sus reflexiones alrededor de problemas propuestos en el curso para que, a través de la resolución de problemas, se puedan establecer generalizaciones y técnicas para el desarrollo del pensamiento algebraico.

En la primera parte del curso se trabajan aspectos relacionados con la comprensión inicial de las construcciones con regla y compás en situaciones específicas a partir del uso de herramientas algebraicas o geométricas expuestas. La posibilidad de trabajar inicialmente sobre las construcciones con regla y compás permite al estudiante hacer uso de diversas representaciones para establecer la posibilidad de una construcción geométrica, a partir del tratamiento de expresiones algebraicas y construcciones asociadas a la situación.

El papel de las expresiones algebraicas se puede distinguir en dos sentidos en el curso: uno, como una forma de representar equivalencias que se presentan desde la geometría en el análisis de construcciones y figuras, y también como una herramienta para representar ecuaciones, donde se hace evidente la relación entre lo dado y la magnitud por encontrar; este segundo tópico es el que va a marcar una tendencia del trabajo sobre las situaciones problema, pues es allí donde las ecuaciones (principalmente las polinómicas) van a hacer parte del proceso de argumentación sobre las construcciones y los problemas asociados.

Uno de los alcances del curso está en la posibilidad de establecer relaciones geométricas a partir del álgebra, y desde allí se hace necesario identificar la incidencia que tienen las ecuaciones polinómicas en la posibilidad de construcción con regla y compás. Este carácter hace que la distancia entre los trabajos de Descartes sobre la noción de curva, ecuaciones y las heurísticas asociadas a los distintos problemas propuestos en el curso sea muy corta, así, es posible destacar en la situación diversas estrategias que fomentan el uso de representaciones en el análisis de situaciones geométricas o algebraicas.

Con la intención de ampliar y complejizar la noción de curva presente en los estudiantes y con el objetivo de reconocer en las representaciones simbólicas, gráficas, geométricas, entre otras, un amplio espectro de herramientas para comprender una situación geométrica, se hace indispensable involucrar situaciones geométricas que lleven al estudiante no solo a interpretar construcciones asociadas a la regla y el compás, donde únicamente podrán tratar con construcciones sobre circunferencias y rectas, lo que impide visualizar las expresiones algebraicas más allá de las ecuaciones cuadráticas; las situaciones propuestas podrán involucrar más curvas y, asimismo, más expresiones algebraicas que fortalezcan las relaciones geométrico-algebraicas que pueden establecer los estudiantes al tratar situaciones que impliquen construcciones geométricas.

Instrumento

Para efectos del desarrollo del curso de la línea de problemas, se decidió poner en un juego una situación cuya solución se genera alrededor de las prácticas identificadas en el texto de Descartes. Las posibilidades de uso de las actividades propuestas alrededor de las prácticas y el desarrollo de procesos de generalización, simbolización, variación y de validación enriquecen los procesos que se esperan desarrollen los estudiantes a partir del abordaje del problema.

Tabla 7. Situación problema

Planteamiento del problema	Dada una esfera de radio r fijo, dividirla en dos partes a través de un plano, de tal forma que las partes queden a una razón dada *a/b*. 1. ¿Es posible realizar esta construcción con regla y compás? 2. ¿Qué elementos algebraicos le permiten estudiar la situación? 3. ¿Qué instrumento(s) le permiten desarrollar esta situación? Realice la construcción geométrica a partir de este instrumento.

La situación problema planteada fue propuesta por Arquímedes en su texto *Sobre la esfera y el cilindro* (proposición 3, libro II [Heath, 1897]); allí está propuesta desde un análisis geométrico, basado en el establecimiento de relaciones proporcionales entre los segmentos que intervienen en la situación. En este caso, identificamos esta situación como una actividad importante donde los estudiantes pueden hacer uso de las herramientas algebraicas y geométricas con las que cuentan para su resolución; su carácter constructivo permite, a partir de su interpretación, manifestar las relaciones geométricas que se pueden analizar desde el álgebra y las argumentaciones algebraicas y geométricas que dan la posibilidad de llegar a sus soluciones.

Esta situación no ha sido escogida por ser propuesta por Arquímedes; como lo consideramos en el capítulo dos, su mayor cualidad es que posibilita el trabajo con las prácticas matemáticas que se desarrollan o, mejor, se configuran en la *Geometría,* de tal manera que la importancia de esta situación no es su historia, sino que para su resolución, los estudiantes deben poner en juego las actividades que configuran las prácticas de representación e instrumentalización; además de poner en discusión la noción de curva, sus usos y las posibilidades de validación, rigor y validez de esta forma de solución de problemas geométricos.

Primero se pretende que los estudiantes reflexionen y construyan argumentos sobre la posibilidad de hacer la construcción con regla y compás, pues uno de los paradigmas que históricamente se presentó en la construcción de las situaciones geométricas propuestas a lo largo de la historia es si era posible realizar la construcción con regla y compás, como se dijo anteriormente; los estudiantes, en un comienzo, se enfrentan a situaciones donde la regla y el compás son los instrumentos de directa aplicación, pero es importante que se construyan herramientas algebraicas y geométricas que les permitan representar, construir sus soluciones en condiciones algebraicas y geométricas, para esto es importante que identifiquen, por un lado, que es posible hacer uso de otro tipo de instrumentos para llegar a las soluciones y que, además, existe una relación directa entre las condiciones geométricas de la construcción y las deducciones algebraicas que se deducen de este tratamiento.

Una situación expuesta inicialmente desde la geometría, como en este caso, para un grupo de estudiantes que ha realizado un acercamiento a la relación entre el álgebra y la geometría a partir de las construcciones con regla y compás, es pertinente por su disposición para el desarrollo de una variedad de estrategias que promoverán el uso de representaciones simbólicas asociadas a las relaciones geométricas presentes en la situación, lo cual constituye uno de los objetivos más claros en la formación de los estudiantes en cuanto a su comprensión y fundamentación de los problemas del álgebra geométrica.

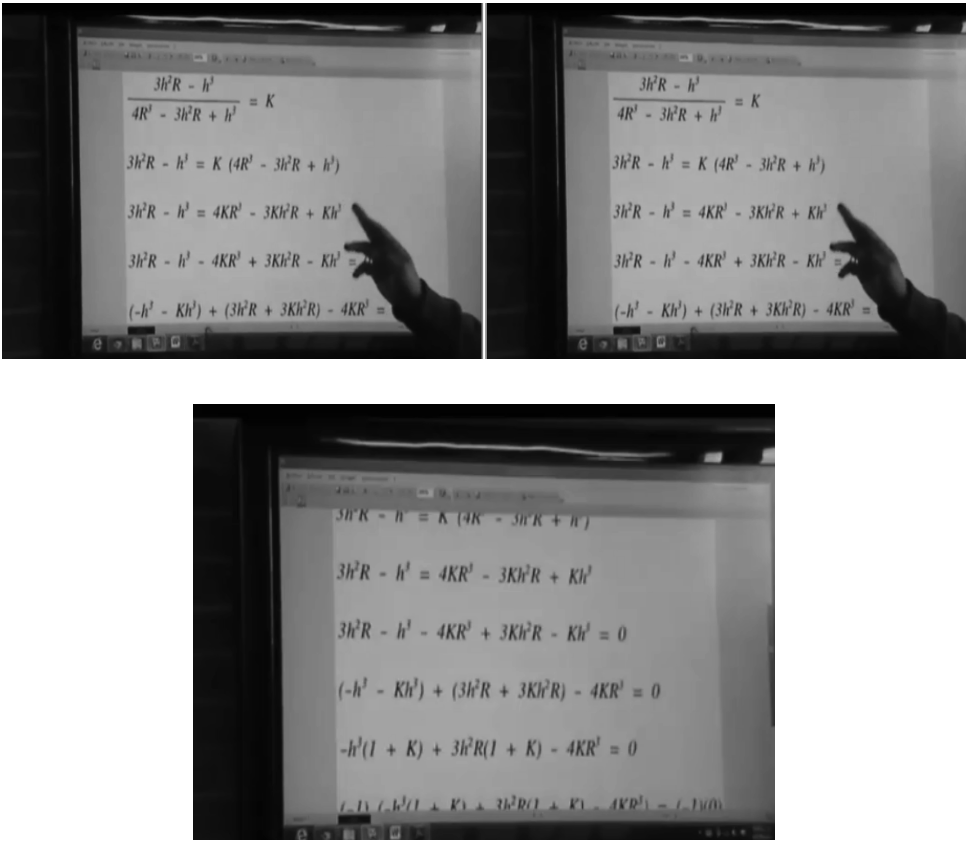
Descripción del trabajo de los estudiantes en la actividad

Para el abordaje de este problema, los grupos recurren inicialmente a la consulta de algunas propiedades de la esfera; en dicha consulta se encuentran con distintos caminos para dar solución al problema; se encuentran con algunos que se relacionan directamente con el método geométrico propuesto por Arquímedes, basado en la razón y la proporción entre las magnitudes que intervienen en el problema:

Estrategia número 1

Uno de estos caminos consiste en cortar la esfera en dos casquetes para relacionar sus volúmenes a partir de una altura *h* y con un radio dado, posteriormente dicha relación se iguala a una razón dada (determinada por un valor numérico *k*); se llega finalmente a una ecuación cúbica en términos de la altura *h*; en la figura 6 se observa el proceso detallado de dicho abordaje.

Figura 6. Construcción de la ecuación en el primer abordaje



Rasgos significativos del abordaje

- El abordaje al problema parte de establecer relaciones ya conocidas para el volumen de los casquetes de una esfera.
- Utiliza elementos principales de una esfera, radio y volumen, pero agrega la variable "altura del casquete", la cual, junto con un proceso netamente algebraico, es la que permite llegar a establecer la ecuación cúbica que les posibilitará encontrar la solución al problema.

- En este caso, la razón a la que se quiere cortar la esfera es vista como una constante k y no como una fracción *a/b*, pero se reconoce que los estudiantes interpretan numéricamente la idea.

El anterior fue uno de los caminos o abordajes que más se presentó en los distintos grupos; otros abordajes estuvieron relacionados con el mismo método, pero surgían cambios respecto a la forma en que se daban los procesos algebraicos; en este tipo de abordajes la razón pedida era tomada como una fracción *a/b* y no como una constante *k*, estos cambios también llevaban a los grupos a establecer la siguiente ecuación cúbica:

$$\left(\frac{a\pi + b\pi}{3}\right)h^3 - \left(ar\pi + br\pi\right)h^2 + \frac{4b\pi r^3}{3} = 0$$

Donde los valores *a* y *b* son los valores de la razón dada, *r* es el radio y *h* es la altura de uno de los casquetes en los que se corta la esfera.

De esta manera, todos los grupos empiezan a llegar a un mismo punto: se parte de los volúmenes de los casquetes de una esfera, los cuales se igualan a la razón pedida (ya sea como constante o como fracción), se relacionan a través de una variable h, que representa la altura de uno de los casquetes, y por medio de procesos algebraicos se llega a una ecuación cúbica, donde se interpreta como la incógnita, pero aún no se reconoce para qué sirve dicha ecuación; posteriormente uno de los grupos establece su utilidad; en el tratamiento algebraico presentado en el informe escrito:

Figura 7. Descripción de la determinación de la ecuación en el informe

Los que primero hacemos es igualar la fórmula para encontrar el volumen de un casquete esférico con el volumen que acabamos de encontrar. Recordemos que R es dado.

$$volumen\ casquete\ esférico = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$$

$$\frac{1}{3}\pi h^2(3R - h) = 9\pi u^3$$

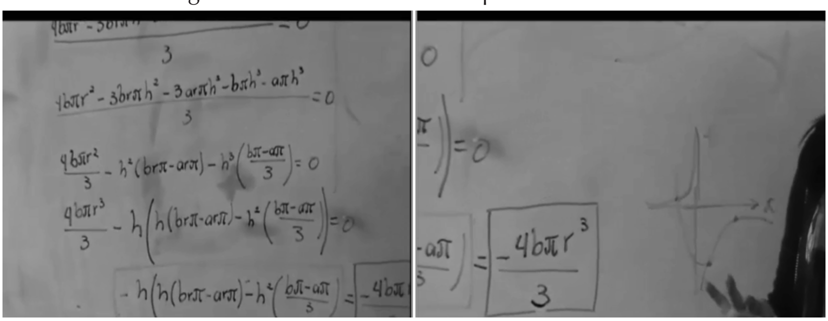
Seguido a esto lo que hacemos es realizar operaciones indicadas para tratar de despejar el valor h, que es la altura del casquete que nos sirve para resolver el problema. Y además es por donde debe pasar el plano.

Este grupo expresa claramente que las soluciones de la ecuación cúbica permiten encontrar el punto exacto por dónde trazar el plano que cortará la esfera en una razón dada, y muestra un ejemplo para un caso específico; de esta manera, el grupo utiliza la curva (ecuación cúbica) como una herramienta para llegar a la solución del problema, con el fin de dar solución a la ecuación por medio de procesos como el de Tartaglia y Cardano; sin embargo, no se precisa el método para llegar a las soluciones de la ecuación de tercer grado, recurriendo al empleo de un *software* como Geogebra para encontrar dichas soluciones (con el uso de su gráfica, para tener una idea de la solución aproximada); es importante resaltar que este grupo ya relaciona los elementos de la esfera con un sistema de coordenadas y asume que los valores del diámetro y la altura h están directamente relacionados con el eje *X* en una posible representación cartesiana de la situación.

De igual forma, este grupo muestra un cambio en la forma de tratar la razón pedida para llegar a la ecuación cúbica, dado que recurre a sumar los valores de la razón dada y dividir el volumen total de la esfera en el resultado de dicha adición; luego iguala el valor del volumen de un casquete esférico con el valor del volumen obtenido y así, por medio de procesos algebraicos, obtiene la ecuación cúbica que brindará la solución al problema; de esta manera, se muestra una forma distinta de tratar la razón dada para llegar a una misma caracterización.

Esto lleva a los grupos a centrarse en la búsqueda de métodos para solucionar la ecuación cúbica; a partir de esto, en uno de los grupos surge la hipótesis de que las soluciones de dicha ecuación cúbica se relacionan con la intersección entre dos cónicas, específicamente entre una parábola y una hipérbola. En la figura 8 se observa más detalladamente la forma de proceder de este grupo.

Figura 8. Ecuación cúbica e hipótesis de curvas



Como se evidencia en la figura, el grupo conjetura que a partir de la intersección entre una hipérbola y una parábola se pueden encontrar las soluciones a la ecuación cúbica, lo cual muestra una estrategia geométrica para dar solución al problema; por otro lado, el grupo establece que así como las soluciones reales de una ecuación cuadrática están relacionadas con la intersección de circunferencias y rectas, las soluciones reales de una ecuación cúbica se relacionan con la intersección entre parábolas e hipérbolas; sin embargo, en este punto, los grupos no identifican la estructura algebraica de dichas curvas inmersas en la ecuación cúbica, este es el nuevo microproblema a identificar, el cual también se relaciona con la pregunta propuesta en el problema respecto a si se pueden construir dichas curvas con regla y compás.

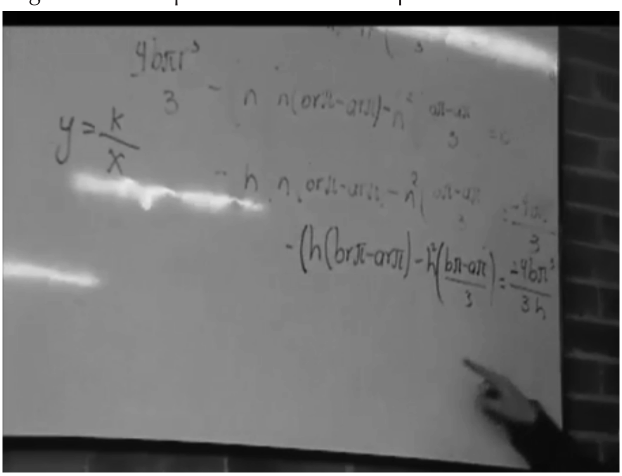
En el siguiente tratamiento, el grupo intenta dar solución a estas dos cuestiones, inicialmente se centra en la posibilidad de construir curvas como la hipérbola y la parábola a partir de la regla y el compás, para esto recurre a la construcción de una hipérbola por medio del movimiento de varias rectas y puntos, donde los rastros de dichas rectas son las envolventes que generan la curva, y argumentan que las curvas no son construibles con regla y compás, dado que se tendrían que construir infinitas rectas e infinitos puntos, lo cual sería imposible.

Por otro lado, explican que con el instrumento "regla y compás" la unión entre los puntos encontrados por medio de las envolventes o son rectas o son partes de circunferencias, pero no podrían llegar a ser otro tipo de "trazo", dado que el instrumento no permite crear ningún otro tipo de unión entre dos puntos aparte de las líneas ya mencionadas; la construcción de este método propuesto por el grupo se realiza por medio del *software* Geogebra, con las características que se mencionan.

Se construye una circunferencia F con centro en A y radio AB, sea C un punto cualquiera sobre la circunferencia y D un punto cualquiera fuera de ella; posteriormente, se traza el segmento CD y a dicho segmento se le traza la mediatriz M, se activa el rastro de la mediatriz y se genera el movimiento del punto C sobre la circunferencia, se llega así a la envolvente que genera la hipérbola.

Finalmente, y con ayuda de otro grupo, se llega a la identificación de las ecuaciones de dichas curvas inmersas en la ecuación cúbica, garantizando de esta manera lo que hasta el momento había sido una hipótesis (figura 9).

Figura 9. Descripción de las curvas a partir de la ecuación



A continuación se muestra específicamente la ecuación cúbica y su relación con la ecuación de las cónicas nombradas:

$$\frac{4b\pi r^3}{3h}+\left(\left(\frac{a\pi+b\pi}{3}\right)h^2-\left(ar\pi+br\pi\right)\right)=0$$

Ecuación cúbica a la que se llega luego de realizar procesos algebraicos que relacionan los volúmenes de los casquetes de la esfera y la razón dada.

Generalmente, lo que hacen los grupos es:

$$\left(\left(\frac{a\pi+b\pi}{3}\right)h^2-\left(ar\pi+br\pi\right)\right)=\frac{-4b\pi r^3}{3h}$$

$$\left(\left(\frac{a\pi+b\pi}{3}\right)h^2-\left(ar\pi+br\pi\right)\right)= \text{ Ecuación parábola}$$

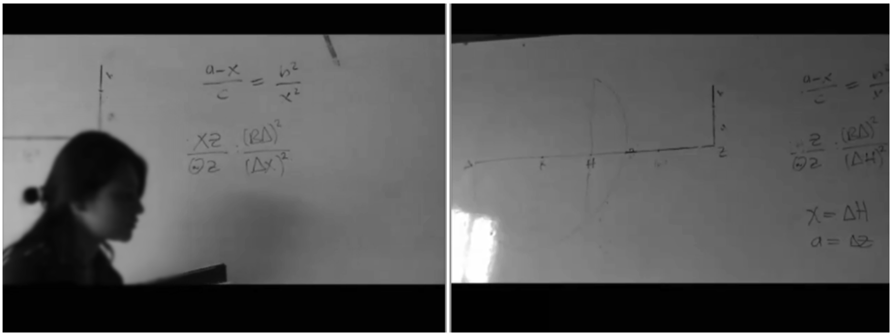
$$\frac{4b\pi r}{3h}= \text{ Ecuación hipérbola}$$

Este procedimiento permite llegar a la solución del problema por medio de la intersección de dos cónicas; a su vez, se muestra la necesidad de recurrir a instrumentos distintos a la regla y el compás para la construcción de dichas curvas; sin embargo, de forma general, se observa que el método hasta el momento propuesto por los grupos para dar solución al problema está relacionado directamente con estrategias algebraicas y geométricas, dado que, por un lado, se recurre al empleo de cónicas (objetos geométricos), pero vistas desde su representación algebraica.

Estrategia número 2

Una forma alternativa de trabajar el problema propuesto surgió en otros grupos a partir de la relación entre el problema visto desde el espacio y su transposición al plano; para lo cual, recurrieron a buscar las relaciones entre el volumen de una esfera y el área de uno de sus círculos máximos a partir del diámetro (elemento común entre dichos objetos); conjeturaron que si se cortaba el diámetro a una razón dada por un punto y se trazaba una recta por dicho punto, el círculo máximo también quedaría dividido a la razón establecida, y, finalmente, si se trazaba un plano por dicha recta, el volumen de la respectiva esfera quedaría dividido también a la misma razón; este planteamiento surge como hipótesis, pero a partir de la solución propuesta en el abordaje anteriormente mostrado, se concluye que dicha relación entre el problema en el espacio y el problema en el plano no se cumple, dado que en el abordaje inicial, se parte de los volúmenes para encontrar el punto *H* que garantiza la razón pedida; en este nuevo abordaje, se procede a buscar a *H* para luego establecer los volúmenes a la razón pedida. En la figura 10, se muestra cómo un grupo propone una solución al problema a partir de este método.

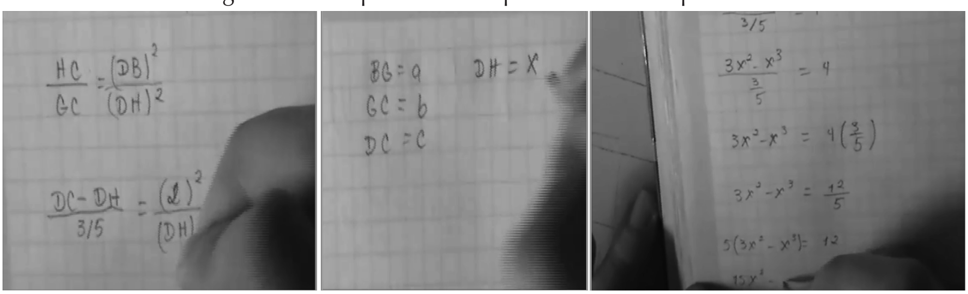
Figura 10. Abordaje del problema desde lo geométrico



Como se puede observar, dicha solución es una estrategia netamente geométrica, dado que se da a partir de una proporción planteada por Arquímedes y de una construcción geométrica que permite relacionar dichas razones.

Estos fueron los principales métodos de solución que surgieron en los distintos grupos y, aunque no fueron los únicos, sí fueron los que más desarrollo tuvieron. Por otro lado, surge la pregunta de si estos dos métodos están relacionados de alguna manera o son formas totalmente distintas de solucionar el problema. En la figura 11, se observa cómo un grupo, partiendo de la estrategia de solución número 2, logra establecer la ecuación cúbica encontrada en la estrategia de solución número 1; de esta manera, se muestra cómo por medio de una estrategia geométrica-algebraica, los grupos llegan a plantear la solución al problema en un caso específico.

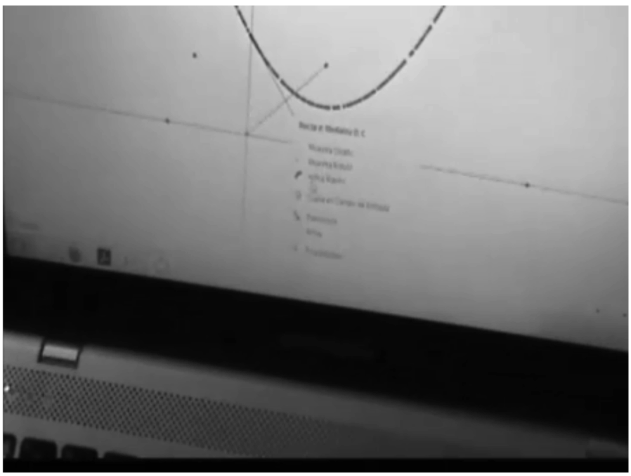
Figura 11. Interpretación del punto H. Caso Específico



Como se puede evidenciar, el grupo parte de una construcción geométrica en la cual se establecen proporciones entre las magnitudes presentes en la situación, que posteriormente son convertidas en cantidades conocidas y desconocidas haciendo uso de un lenguaje algebraico; esta conversión es la que permite al grupo poder pasar de lo geométrico a lo algebraico sin perder generalidad en el proceso; se llega así a una ecuación cúbica que le permite llegar a la solución del problema; de esta manera, se da respuesta no solo a la pregunta de si las dos estrategias de solución están o no relacionadas, sino que de forma implícita se responde a la pregunta número dos propuesta en el problema, dado que se evidencia que los elementos algebraicos que permiten dar solución a la situación están relacionados inicialmente con el uso de un lenguaje algebraico para la asignación de lo que se considera como cantidades conocidas y cantidades desconocidas, en pro de relacionarlas y encontrar una forma sintetizada de la situación (ecuación cúbica) que conduzca a la solución del problema.

Finalmente, respecto a los instrumentos que permiten construir las curvas propuestas para la solución de la ecuación cúbica, surgen distintas discusiones; por un lado, un grupo ya había mostrado la imposibilidad de construir curvas como la hipérbola a partir de regla y compás; en la figura 12, se muestra cómo un grupo propone una nueva construcción de lo que consideran una parábola; posteriormente, el mismo grupo reconoce la imposibilidad de realizar dicha construcción a partir de regla y compás, dado que tendrían que construir infinitos puntos.

Figura 12. Construcción de la parábola en Geogebra



Las características de la construcción son:

Constrúyase un segmento *AB*, sea *D* un punto cualquiera sobre el segmento *AB* y *E* un punto cualquiera fuera del segmento *AB*; constrúyase una recta perpendicular *L* al segmento *AB* por el punto *D* y trácese el segmento *DE*; constrúyase la mediatriz del segmento *DE* y sea *P* el punto de intersección entre la recta perpendicular *L* y la mediatriz del segmento *DE*; luego se activa el rastro del punto *P* y se procede a mover el punto *D* sobre el segmento *AB*, se genera así la posible parábola. De esta manera, se identifica claramente la necesidad de recurrir a instrumentos distintos a la regla y el compás para construir curvas distintas a la circunferencia.

Análisis de la experiencia

Los anteriores resultados muestran la fortaleza que tienen los métodos basados en la relación entre el álgebra y la geometría en el tratamiento de situaciones de constructibilidad; es importante aclarar que las heurísticas de cada uno de los grupos fueron motivadas por la situación y por cada una de sus nociones previas alrededor del álgebra y la geometría. Una de las principales herramientas en el trabajo cartesiano, con la cual se promueve el establecimiento de ecuaciones asociadas a las situaciones geométricas, está en trabajar el problema en acto, es decir, desde el supuesto de su resolución.

A continuación presentamos un análisis y una reflexión sobre las estrategias que los estudiantes tuvieron para la resolución de la situación, las herramientas que usaron y relacionaron en su proceso y una descripción de las actividades matemáticas que se presentaron alrededor del trabajo sobre la situación geométrica.

En los grupos que tuvieron un acercamiento desde las expresiones algebraicas, principalmente las ecuaciones, su propuesta está basada en que el problema está resuelto y, por ende, es posible llegar a una ecuación asociada a la partición de la esfera, a una razón dada, donde la incógnita es la altura de uno de los casquetes, que le permitirá identificar un punto de corte que cumpla con las condiciones dadas. Este tratamiento es fundamental en el método cartesiano, pues en este se fundamenta para llegar a las ecuaciones que permiten realizar la construcción de curvas y tener una caracterización de la(s) solución(es). Al respecto, en un apartado de su primer libro, en la *Geometría,* Descartes (1996) afirma:

> Si se quiere resolver un problema hay que considerarlo primero como ya resuelto y poner nombre a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las conocidas como a las desconocidas. Luego sin hacer ninguna diferencia entre las conocidas y las desconocidas se recorrerá la dificultad según el orden que se muestre, con más naturalidad, la dependencia mutua de unas y otras. (p. 392)

Dentro del alcance de las estrategias de los estudiantes a partir de la situación propuesta, también podemos hablar del uso de representaciones para llegar a la solución del problema; para los estudiantes, uno de los elementos directos para interpretar la situación estaba en la determinación de una ecuación asociada a la situación propuesta, pues se encontraban con un conjunto de fórmulas para el cálculo del volumen de la esfera y de los casquetes que les dieron la posibilidad de establecer relaciones expresadas de forma simbólica.

El problema verdadero dentro de las estrategias se encontraba cuando debían llegar a la solución exacta del problema, no solo por métodos que permitieran llegar a soluciones aproximadas; es decir, su mayor problema se encontraba en la construcción.

El alcance de las construcciones con regla y compás en el trabajo de los estudiantes los llevó a pensar, como primera estrategia de construcción, en la que se hace uso de estos instrumentos; cuando estudiaron más a fondo la situación, se presentó una variedad de problemas y curvas que requirieron de otro tipo de instrumentos para su construcción, allí se encuentran con la necesidad de construir curvas como las secciones cónicas a partir de la manipulación de instrumentos más complejos que la regla y el compás.

Un primer acercamiento a la construcción de las secciones cónicas permitió a los alumnos estudiar estas curvas desde su *construcción punto a punto*; es decir, como una construcción donde puedo construir varios puntos de la curva que después "debería unir para formar toda la línea curva"; a los estudiantes, por su formación, les parece un modo de construcción insuficiente para resolver el problema, pues "se requiere de toda la línea curva para lograr intersectar las dos curvas y poder llegar a la solución"; por esto, deciden comenzar a buscar otro tipo de instrumentos que les permitan construir la curva totalmente y no solo por puntos; es claro que detrás de estas interpretaciones de los estudiantes está la noción de continuidad, que, aunque no es tratada directamente en el espacio de formación, se puede involucrar en algún momento por la necesidad de fundamentación para solucionar una situación.

El problema de la construcción de curvas se convierte en una necesidad por la dificultad de construir una parábola y una hipérbola, necesarias para llegar a la solución de la ecuación cúbica asociada a la situación. El tratamiento algebraico sobre la ecuación cúbica fue lo que les permitió descubrir que las soluciones de la ecuación podían encontrarse por medios geométricos, haciendo uso de intersección entre líneas curvas. Nuevamente, las representaciones simbólicas y geométricas permiten a los estudiantes hacer un acercamiento a la determinación del lugar donde deben cortar la esfera para que quede dividida a una razón dada. Así como en el tratamiento cartesiano de las situaciones geométricas, para los estudiantes las curvas se manifestaron como herramientas para llegar a la solución del problema, uno de los aspectos epistemológicos que fundamenta la noción de curva durante la historia.

En el proceso de resolución de la situación, la actividad de explicación fue la que estuvo presente en la mayor parte del trabajo; por un lado, las representaciones simbólicas fueron sustentadas desde las relaciones geométricas presentes en las construcciones, ya sea por la misma deducción de la razón entre los casquetes esféricos o desde la propuesta de Arquímedes en las relaciones proporcionales entre los segmentos determinantes en la construcción; por esto, para los estudiantes, las ecuaciones algebraicas fueron el síntoma de las relaciones que permitían solucionar el problema, y asimismo fueron la forma de acercamiento a los procesos de construcción de curvas que se presentaban en la situación.

Frente a la relación ecuación curvas, ellos afirmaban:

"[…] De esta igualdad

$$h\left(br\pi - ar\pi\right) - h^2\left(\frac{b\pi - a\pi}{3}\right) = \frac{-9b\pi}{3h}$$

podemos deducir que un lado de la igualdad expresa una parábola y el otro una hipérbola, entonces la igualdad es la intersección entre la parábola y la hipérbola".

Para hacer un análisis sobre los tres ítems que desglosan la situación general de la esfera para los estudiantes, es importante recalcar que a partir de su propuesta, se pretendía trabajar frente a dos aspectos, principalmente: uno que permitiera hacer uso de diversas representaciones en el análisis, las estrategias y el establecimiento de la solución, y otro en la perspectiva de la construcción de la solución, pues es allí donde se pretendía que los estudiantes se encontraran con la dificultad de construir sus soluciones y vieran la necesidad de hacer uso de otro tipo de instrumentos para realizar el proceso.

Por el tipo de trabajo que venían realizando los estudiantes, es importante reflexionar sobre las preguntas propuestas; en este sentido, destacamos que el hecho de solicitar el uso de herramientas algebraicas en el análisis no fue necesario, pues el lugar propicio donde los estudiantes lograron poner su abordaje en concreto fue el álgebra simbólica, debido a que la principal forma de aproximación al problema fue por medios algebraicos; asimismo, el trabajo sobre la construcción los llevó a establecer una conexión continua entre el trabajo geométrico y el algebraico.

Igualmente, en el análisis que los estudiantes lograron sobre la construcción, su trabajo les permitió llegar, por un lado, a la negación de la construcción de la situación haciendo uso de la regla y el compás exclusivamente, esto les dio la posibilidad de estudiar y analizar otro tipo de instrumentos y curvas, pero fue el análisis sobre la ecuación cúbica asociada lo que les permitió realizar un acercamiento al tipo de curvas solicitadas, presentando a las secciones cónicas como herramientas fundamentales en la construcción de la solución; por esto, las preguntas uno y tres encapsulan el trabajo sobre la construcción y lo elevan a un análisis sobre la relación entre el tipo de ecuación a resolver y las posibles curvas e instrumentos a utilizar; debido a lo anterior, el trabajo de los estudiantes no terminó en la determinación de las soluciones asociadas a la situación, continuó con la reflexión y el análisis sobre las relaciones curva-ecuación, que les permitió manifestar como una primera conclusión obtener clasificaciones cercanas a las construidas por Descartes en el libro dos, pues llegaron a definir que las ecuaciones cuadráticas podrían resolverse con regla y compás y algunas ecuaciones cúbicas y cuárticas, con instrumentos como el conicógrafo, en la perspectiva de las construcciones por intersección entre secciones cónicas.

Es importante destacar que otro de los elementos asociados a la actividad de descubrimiento en los estudiantes fue la relación que existe entre la ecuación algebraica, la curva que constituye y la situación problema que está en desarrollo; sus métodos previos a este tipo de trabajo estaban completamente relacionados con las construcciones con regla y compás; en este caso, la situación planteada permitió a los estudiantes ampliar su comprensión frente a la relación entre geometría y álgebra al punto de destacar las ecuaciones y curvas que intervienen en la resolución de una situación asociada a una construcción geométrica.

En este punto, es importante evocar el trabajo cartesiano como un referente para la construcción de la situación y el análisis histórico epistemológico de la relación entre geometría y álgebra en cuanto a la formación de profesores de matemáticas; en el marco de la estructura que se deduce del texto la *Geometría* (Bos, 1998), se presenta como objetivo del texto la formación de un método para el arte de resolver problemas geométricos y describe que para realizar una lectura clara y analítica del texto, se requiere de una observación desde dos puntos de vista: desde las técnicas y desde la metodología, pues para el autor, son los aspectos que definen el propósito cartesiano en el desarrollo de la obra.

Esta perspectiva permite definir en las estrategias de los estudiantes, principalmente, técnicas fundamentadas en la descripción de relaciones geométricas a partir de expresiones algebraicas, así como el tipo de construcción geométrica necesario para solucionar la situación. Es posible concluir que las expresiones simbólicas y los elementos manipulables en *software*, como Geogebra, en la construcción de curvas, sirvieron como técnicas para la determinación de soluciones del problema en cuestión.

Didáctica del Álgebra

El espacio académico Didáctica del Álgebra está propuesto curricularmente para el cuarto periodo académico de la Licenciatura; lo anteceden las reflexiones didácticas sobre la aritmética, en especial las relacionadas con el campo aditivo y multiplicativo. De igual manera, en el espacio denominado Transición Aritmética al Álgebra, se realiza un trabajo respecto al papel de la ampliación de los sistemas numéricos, el tipo de problema algebraico y aritmético, la generalización y otros asuntos que se consideran importantes en la construcción de conocimiento didáctico del contenido por parte del profesor de matemáticas.

En Didáctica del Álgebra, se pretende trabajar una postura desde la resolución de problemas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares. En este sentido, el espacio desarrolla una reflexión sobre el uso de algunas propuestas y materiales didácticos, como por ejemplo los elaborados por Dienes (1970), y su relación con las reflexiones que han realizado algunos modernos respecto al pensamiento algebraico dispuesto en la obra de Euclides (Grattan Guinness, 1996; Artmann, 1999), especialmente en el libro dos de *Elementos*.

El desarrollo de este ejemplo, el pensamiento dispuesto en *Elementos* y la solución de ecuaciones hasta tercer grado constituyen el primer aspecto que se aborda en relación con la construcción didáctica del álgebra y, en especial, con el concepto de *ecuación*. Se analizan artículos de investigación que reportan experiencias de aula con este tipo de materiales y reflexiones; de igual manera, se revisa la interpretación que se puede hacer del uso de la letra durante este desarrollo.

El segundo aspecto que se vincula está relacionado con la construcción de simbolización; para ello, se abordan los tres periodos propuestos por Nesselman (Malisani, 2003): fase retórica, fase sincopada y fase simbólica; se desarrolla un trabajo respecto al tipo de problemas y las posibilidades didácticas en cada una de estas fases.

Los anteriores aspectos hacen parte de los asuntos tratados con los estudiantes durante el segundo semestre de 2013, antes de trabajar con la actividad que se reporta en este documento y que está íntimamente ligada al trabajo de los estudiantes en el espacio académico reportado anteriormente. De esta manera, se intenta hacer una reflexión que permita comprender los aspectos que cambian en su interpretación o uso durante el desarrollo del problema descrito para la experiencia en el espacio académico Problemas del Álgebra Geométrica.

Instrumento

Como se mencionó, el trabajo que antecedió la experiencia tuvo énfasis en las reflexiones didácticas que se realizaron sobre el libro dos de *Elementos*, de Euclides; este insumo y el trabajo realizado en la experiencia descrita sobre el curso de Problemas del Álgebra Geométrica son las bases para el desarrollo de la reflexión didáctica que se propone en este curso. A continuación se presentan las preguntas realizadas al grupo de estudiantes:

1. Describa las diferencias o similitudes que hay entre procedimientos, conocimientos y objetos matemáticos, puestos en juego en la solución del problema de la esfera trabajado en el curso de Problemas del Álgebra Geométrica y las reflexiones sobre el libro dos de *Elementos* de Euclides.
2. Describa las diferencias o similitudes respecto al pensamiento algebraico que ponen en juego al resolver la situación de la esfera y el posible pensamiento algebraico que encontraron o que los autores argumentan existe en los libros de Euclides.
3. Realice un análisis de las representaciones usadas en el desarrollo del problema de la esfera y argumente a favor o en contra de la siguiente afirmación: "La solución del problema de la esfera implica el trabajo con diferentes representaciones de los objetos matemáticos".

Respecto a las intenciones del instrumento, debemos decir que la primera pregunta tiene la intención de poner en juego los aspectos relacionados con el cambio epistemológico y ontológico de los conceptos matemáticos involucrados, al igual que reflexionar sobre el método para la solución de problemas geométricos; en este sentido, se pretende que el trabajo en las respuestas a esta comparación permitan al estudiante para profesor desarrollar los aspectos referenciados para las actividades de descubrimiento y explicación propuestos para el SCK a partir de la obra.

El segundo ítem del instrumento está planteado para que los estudiantes ubiquen elementos diferenciadores entre el método euclideano para la resolución de problemas geométricos y el método usado para la solución del problema de la esfera; se esperó que los estudiantes demarcaran elementos de lo que significa pensar algebraicamente, en especial a lo que se refiere al significado de una ecuación, sus usos y las posibilidades en la resolución de un problema geométrico. De esta manera, se pretendió el desarrollo de las actividades de explicación y formulación.

La última pregunta a desarrollar por parte de los estudiantes hace referencia al uso, significado y papel de las representaciones en la solución del problema de la esfera; en este sentido, se pretende que el estudiante se cuestione sobre estos aspectos y establezca la importancia de cada uno en el desarrollo del problema. De igual manera, pretendemos que se cuestione sobre las duplas representación algebraica-representación gráfica, representación gráfica-representación algebraica y los significados de representación gráfica-problema solucionable, representación algebraica-problema solucionable. En general, se pretende que el instrumento logre la práctica de saber-analizar:

> Este saber-analizar correspondería a una interrogación del docente sobre los conocimientos que se movilizan en su experiencia (incluidos los de su propia formación), con el fin de establecer en qué medida se reconoce en ellos o debe producir, en su defecto, un conocimiento personal, autónomo e interrogativo. (Arboleda, 2011, p. 1)

Lo ideal es que este proceso reflexivo permita que el profesor de matemáticas logre modificar su propia práctica, pero, de igual manera, se necesitaría que el conocimiento de la matemática desde las prácticas de constitución de los objetos y teorías matemáticas fuera abordado como lo fue en el curso de Problemas del Álgebra Geométrica, donde se estudió la historia de la matemática no solo como la explicación de la epistemología del conocimiento matemático, sino se ahondó en el papel de los acontecimientos de constitución de un objeto en tanto actividad humana de razonamiento, que se originan en el trabajo aldedor de prácticas producidas por grupos culturales, quienes validan o invalidan una forma de proceder o pensar.

Descripción del trabajo de los estudiantes en la actividad

La actividad se realizó por grupos de máximo cuatro estudiantes durante dos semanas de clase; es decir, doce horas. Luego se llevó a cabo una socialización por grupos. Metodológicamente, se asume el instrumento a partir de la metodología de solución de problemas propuesta en el proyecto curricular; de esa manera, los estudiantes dan inicio a la actividad tomando cada cuestionamiento como un problema que les permite definir un asunto didáctico relacionado con el álgebra.

Se realizaron grupos de tres o cuatro estudiantes; las horas de clase fueron utilizadas para que lo grupos tuvieran un espacio de discusión y socialización de las ideas que tenían para cada pregunta; el orientador del espacio académico se encargó de apoyar y motivar las discusiones de los grupos, al igual que sugerir la bibliografía necesaria para apoyar el trabajo.

Alrededor del trabajo en cada una de las preguntas, los grupos de estudiantes entregaron un documento escrito y realizaron una presentación, en la que dieron a conocer los análisis y consensos a los que llegaron con sus compañeros.

Análisis de la experiencia

A continuación se presentan los apartes de las conversaciones con los estudiantes, y algunos fragmentos del video de la exposición de socialización del instrumento, al igual que el análisis que podemos realizar de ella. Estos datos fueron recolectados por medio de filmaciones de las sesiones de trabajo y de las exposiciones grupales.

Primer ítem

Respecto al primer cuestionamiento, inicialmente los estudiantes para profesor deliberaron sobre los elementos que les permitían acercarse a la pregunta. Aparecieron reflexiones sobre qué es y cómo identificar un objeto matemático, cómo identifico conocimientos y qué es un procedimiento; a partir de estas preguntas, inició un proceso de indagación de los elementos que se les pedía comparar. A continuación se presentan las definiciones que utilizaron cada grupo[3] y el análisis de las respuestas propuestas.

Tabla 8. Ítem 1, grupo 1

Grupo 1		
Conocimiento	Procedimiento	Objeto matemático
Es aquel que crean los diversos grupos sociales y que, de alguna manera, se institucionalizada en ellos; sin embargo, este también puede ser subjetivo.	Definen que los procedimientos hacen parte de la configuración que Godino (2002) realiza de los objetos matemáticos: • Lenguaje. • Situaciones. • Procedimientos. • Conceptos. • Propiedad o atributo. • Argumentos.	Godino (2002) expresa, en otras palabras, que un objeto matemático es "todo aquello que es indicado, señalado, nombrado, cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas".

A partir de estas definiciones, los estudiantes acopian los siguientes argumentos para hallar las similitudes y diferencias:

> […] consideramos al libro II de Euclides como uno de los precursores que hacen subyacer la emergencia del álgebra desde la geometría, por tanto decimos que las ecuaciones cuadráticas subyacen como un objeto matemático alrededor del libro II de Euclides.
>
> […].
>
> […] todo esto (hace referencia al procedimiento llevado a cabo) nos permite decir que existen unas relaciones entre procesos geométricos y algebraicos, pues se requiere encontrar expresiones algebraicas que hallen una incógnita que será la altura correspondiente a cada casquete según sea la razón en la que la esfera esté dividida.
>
> […].
>
> […] la expresión algebraica cambia de sentido de incógnita a una relación entre la altura que termina siendo una cúbica […].
>
> […].

3 Los fragmentos presentados son extraídos de los trabajos realizados por cada grupo y presentados en las socializaciones.

> […] una similitud en los procedimientos es que la solución se puede hacer con una ecuación […] en Euclides la solución de una cuadrática es un segmento pero en el problema es un punto de la cúbica […] sin embargo, ambas son ecuaciones.
>
> […].
>
> […] para solucionar el problema de la esfera, se debe saber que la cúbica se puede reducir a la igualdad entre una cuadrática y una hipérbola, eso permite encontrar un procedimiento para la hallar el punto […].
>
> […].
>
> Lo estamos viendo desde la letra, represento el procedimiento de Euclides por medio de letras que significan segmentos o áreas, principio y final del segmento y construyo proporciones y ese parece ser el procedimiento que propone Euclides […] la letra no significa lo mismo que en el problema […].

Las anteriores expresiones, que son tomadas del trabajo presentado por el grupo, permiten decir que este grupo de estudiantes reconocen un papel diferente para la representación simbólica que se produce en la solución, y en relación con esta diferencia, ubican similitudes respecto a los objetos, como, por ejemplo, respecto a la ecuación, pues para ellos, tanto en el libro de Euclides como en la solución del problema de la esfera es posible expresar por medio de una ecuación.

No se evidencia reflexión respecto al papel de las curvas en la solución y la diferencia en el método de solución de problemas geométricos; pareciera que la relación entre hipérbola, cuadrática y cúbica no les indica un cambio en el procedimiento que se asume para solucionar el problema; de esta manera, no identifican diferencias entre los procedimientos, pero sí en los conocimientos que se ponen en juego y el significado de los objetos matemáticos involucrados.

Sin embargo, los estudiantes encuentran que el uso que se hace de las letras dentro del procedimiento que llevaron a cabo para la solución del problema es diferente al uso que evidenciaron para el trabajo con el libro dos de *Elementos* de Euclides. Este aspecto lo entendemos como crucial, pues lleva a pensar en el cambio ontológico de la igualdad y el uso de las proporciones.

Tabla 9. Ítem 1, grupo 2

Grupo 2		
Conocimiento	Procedimiento	Objeto matemático
Es un conjunto de información almacenada mediante la experiencia o el aprendizaje.	Consiste en proceder, que significa actuar de una forma determinada; según la definición general, es la manera de ejecutar algo.	Se quiere designar las cosas (elementos) que se emplean en matemáticas.

La respuesta al ítem por parte de los estudiantes se evidencia en los siguientes apartes del trabajo:

> […] los conocimientos que se usan no son los mismos en Euclides, se transforman figuras mientras que para solucionar el problema de la esfera, se debe saber encontrar la cúbica que representa la relación entre el volumen y la altura.
>
> […].
>
> Donde se observa que los objetos matemáticos no son iguales en Euclides se puede interpretar álgebra, en la solución del problema de la esfera es necesario hacer la cúbica, es necesario saber resolver la ecuación.
>
> […].
>
> Los procedimientos son diferentes, no encontramos ninguna similitud […] Euclides transforma figuras geométricas en figuras geométricas para el problema toca construir la ecuación a partir de las relaciones y resolverla […].

Este grupo de estudiantes logran identificar que aunque el problema es geométrico, su solución excede las formas de proceder de la Antigüedad; de hecho, identifican que el álgebra se posa como el elemento que permite solucionar el problema; de igual manera, identifican que es la ecuación la que posee la respuesta.

De igual manera, hacen referencia al nuevo método de solución de problemas geométricos y al establecimiento de un procedimiento que permita la solución; en este caso, se infiere que es primero usar la información para plantear la ecuación, y, segundo, resolver la ecuación. No existe en el trabajo referencia a las curvas, únicamente hacen referencia a la solución de la ecuación.

Tabla 10. Ítem 1, grupo 3

Grupo 3		
Conocimiento	Procedimiento	Objeto matemático
Es lo aprendido para desarrollar dichos procedimientos; el resultado de ellos.	Estos serán tomados como la metodología, la secuencia que se siguió para llegar al objeto matemático.	El objetivo, a lo que se quiere llegar, por el cual se desarrollan tales procedimientos.

A diferencia de los grupos anteriormente trabajados, este grupo de estudiantes identificaron aspectos puntuales para cada asunto que estudiaron. Las figuras muestran las tablas presentadas durante la exposición de socialización.

Figura 13. Diapositiva conocimientos

CONOCIMIENTOS

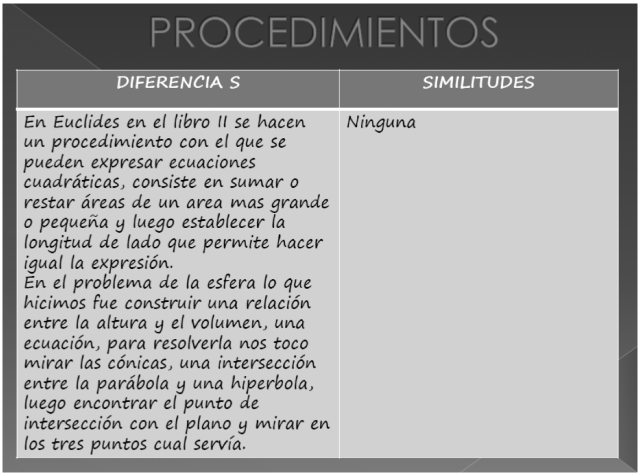
DIFERENCIA S	SIMILITUDES
La expresión matemática que se construye en el problema de la esfera, relaciona segmentos que me multiplican y da volumen. En Euclides se establecen relaciones solo entre cosas iguales, áreas, volúmenes, segmentos	En ambos casos se usan razones y proporciones. En ambos casos se solucionan ecuaciones.
La ecuación se puede representar a partir de una curva, para el problema. En Euclides no hay ecuación, se trabajan con razones e igualdades	Se usan áreas que se interpretan como el producto entre segmentos
En el problema el producto se representa por un segmento en Euclides siempre es un área	Se usan letras que representan objetos geométricos

Este grupo de estudiantes encontraron asuntos que creemos importantes en la posibilidad de la construcción didáctica del álgebra; en la primera diferencia, los estudiantes encuentran dos tipos de interpretaciones para la expresión matemática: una relacionada con la igualdad de cosas que son iguales y otra relacionada con la igualdad en términos de variación; de igual manera, hacen referencia a la ruptura de la homogeneidad presente en el texto de Euclides. La siguiente conversación con el profesor de la asignatura permite ratificar que los estudiantes logran identificar dos usos diferentes para las igualdades:

> Estudiante 1: […] profe es que cuando hallamos la cúbica, se tiene una expresión del volumen a partir del área y la altura.
>
> Profesor: Pero de igual manera es una igualdad, la pregunta es: ¿el significado de la igualdad que se usa entre razones es igual que la igualdad que plantean entre el volumen, el área y la altura?
>
> Estudiante 1: No es diferente, uno puede calcular cualquier volumen a partir de la expresión.
>
> Estudiante 2: Para cualquier altura, uhhhh, la altura es independiente y el volumen depende…
>
> Estudiante 1: Es que aquí no necesito que áreas me den áreas y esas cosas… multiplico un área y segmento y me da volumen.

De igual manera, los estudiantes reconocen que la expresión representa una curva y que esta es la representación de la relación entre las variables, eso les permite diferenciar epistemológicamente la expresión algebraica y les permite pensar que, aunque las transformaciones y la resolución de ecuaciones son un asunto del álgebra, también lo son las expresiones que hacen referencia a la relación entre magnitudes. La figura 14 muestra las conclusiones de este grupo presentadas en la socialización.

Figura 14. Diapositiva procedimientos

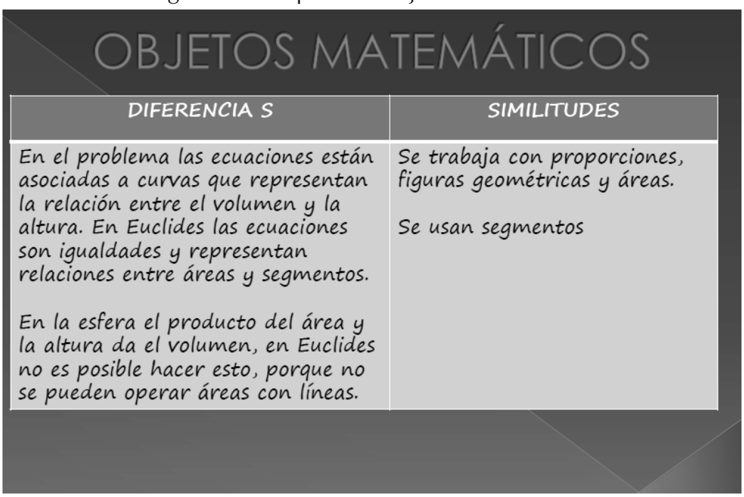


PROCEDIMIENTOS

DIFERENCIA S	SIMILITUDES
En Euclides en el libro II se hacen un procedimiento con el que se pueden expresar ecuaciones cuadráticas, consiste en sumar o restar áreas de un area mas grande o pequeña y luego establecer la longitud de lado que permite hacer igual la expresión. En el problema de la esfera lo que hicimos fue construir una relación entre la altura y el volumen, una ecuación, para resolverla nos toco mirar las cónicas, una intersección entre la parábola y una hiperbola, luego encontrar el punto de intersección con el plano y mirar en los tres puntos cual servía.	Ninguna

En la diapositiva que presentaron los estudiantes muestran que el procedimiento que usaron para resolver el problema de la esfera difiere de lo visto en la resolución de ecuaciones por medio del material didáctico relacionado con Euclides. De igual manera, plantean en el procedimiento del problema de la esfera, el hecho de que el procedimiento los lleva a encontrar un punto de una curva porque esta contiene la relación entre la altura y el volumen. Respecto a los objetos matemáticos, los estudiantes presentaron la siguiente diapositiva (figura 15).

Figura 15. Diapositiva objetos matemáticos



OBJETOS MATEMÁTICOS

DIFERENCIA S	SIMILITUDES
En el problema las ecuaciones están asociadas a curvas que representan la relación entre el volumen y la altura. En Euclides las ecuaciones son igualdades y representan relaciones entre áreas y segmentos. En la esfera el producto del área y la altura da el volumen, en Euclides no es posible hacer esto, porque no se pueden operar áreas con líneas.	Se trabaja con proporciones, figuras geométricas y áreas. Se usan segmentos

No se evidencia una relación de lo que encontraron al respecto con la definición; al parecer, lo que vinculan al objeto matemático está relacionado con el método que permite desarrollar el problema geométrico.

Tabla 11. Ítem 1, grupo 4

Grupo 4		
Conocimiento	Procedimiento	Objeto matemático
Es un conjunto de ideas que se va adquiriendo a partir de la experiencia por medio de diferentes procesos.	Es una secuencia de actividades que van dirigidas hacia un propósito, por medio de herramientas que permiten desarrollar una determinada situación.	El objeto matemático hace referencia a postulados, axiomas y definiciones que son aceptados sin demostración alguna.

A partir de estas definiciones, los estudiantes realizaron las siguientes afirmaciones, las cuales se extrajeron del documento escrito que presentó el grupo (figura 16).

Figura 16. Conocimientos grupo 4

Diferencia entre conocimientos: Como habíamos comentado anteriormente el libro gira alrededor de conocimientos como el de la identidad $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, la construcción de la media geométrica y la igualdad de área entre rectángulos y cuadrados. Mientras que el conocimiento base que nos permite llegar a la solución del problema de la esfera es que entre el área de la circunferencia y el volumen de la esfera hay una razón de $\frac{4}{3}r$.

Conocimiento del área: $\pi . r^2$

Conocimiento de la esfera: $\frac{4}{3}\pi . r^3$

Estableciendo como conocimiento de segunda dimensión el área de la circunferencia y de tercera dimensión el volumen de la esfera, encontramos que luego de la reflexión de ambos conocimientos, el conocimiento que nos permite solucionar el problema de la esfera es:

$$\frac{4}{3}r$$

Los estudiantes encontraron la diferencia entre tener una ecuación que representa una identidad y una que permite expresar una relación entre el volumen y el área. Este aspecto permite que construyan las diferencias de significado de las expresiones matemáticas desde su uso. Respecto a los objetos matemáticos, el grupo hace referencia a la diferencia en el área; el siguiente fragmento del trabajo permite evidenciar este hecho (figura 17).

Figura 17. Objetos matemáticos. Grupo 4

> Aunque, tanto en el problema de la esfera como en el libro 2 de Euclides se hable de área, el área de los elementos es totalmente geométrica y se refiere a rectángulos y cuadrados, por el contrario el objeto matemático área en el desarrollo del problema de la esfera además de basarse únicamente en la circunferencia, es visto desde lo algebraico, es decir como una expresión que incluye tanto letras como números con relaciones ocultas. Pero solo se toma el área de la circunferencia la cual Euclides no trabaja en el libro 2.

En el caso de los procedimientos, los estudiantes afirman que no llegaron a un acuerdo al respecto, pues reconocen que son diferentes, pero, para dos de ellos, el procedimiento que se puede deducir a partir de la solución del problema de la esfera no tiene los mismos elementos que para los otros; la diferencia se establece por el uso de un proceso de instrumentación o de programas que permitan ver las relaciones, como en el caso de Geogebra:

> Estudiante 1: El procedimiento en general serviría para solucionar cualquier problema.
>
> Estudiante 2: Sí, pero sería relacionar los datos y representarlos en Geogebra, ahí ya se ven las soluciones.
>
> Estudiante 1: No para qué el Geogebra, toca resolver la ecuación y ya…
>
> Estudiante 2: Pero si la ecuación no tiene solución o es de grado seis o siete, ¿cómo la soluciona?
>
> Estudiante 1: Uhhhh, no sé, pero se debe poder.
>
> Estudiante 2: Sí ve, se necesita el Geogebra para saber si tiene solución.

Tabla 12. Ítem 1, grupo 5

Grupo 5		
Conocimiento	Procedimiento	Objeto matemático
Construcción de saberes a partir de diferentes relaciones.	Ejecución de algún "requerimiento" a partir de ciertos pasos.	Un objeto matemático es un objeto abstracto estudiado en matemáticas. Algunos ejemplos típicos de objetos matemáticos son los números, los conjuntos, las funciones y las figuras geométricas.

Figura 18. Tabla grupo 5

Euclides basa sus demostraciones a través de procedimientos con objetos matemáticos que cumplen axiomas y propiedades aceptadas desde un principio sin necesidad de demostración. En el desarrollo del problema de la esfera, se entablan procedimientos basados en teorías y postulados aceptados como verdaderos.			algorítmico en el que se apela al conocimiento de la composición y las propiedades de las operaciones.		

Similitudes			**Diferencias**		
Procedimientos	**conocimientos**	**objetos matemáticos**	**procedimientos**	**conocimientos**	**objetos matemáticos**
En el problema de la esfera y en el trabajo presente en los elementos de Euclides, hay una preocupación por reflexionar sobre la naturaleza de los "objetos" matemáticos (geometría) y no solo hay una preocupación por la medición de los mismos. La esfera al ser cortada con un plano, dado que la esfera está en el espacio y que un plano corta al espacio en dos. Este postulado se toma como verdadero y se aceptan sin demostrar, supuestamente por su evidente certeza.	El resolver la situación de dividir en una razón dada una esfera, se requirió reflexionar en el libro número dos de los elementos de Euclides que trabaja Transformaciones de áreas y álgebra geométrica griega de la Escuela Pitagórica. Se establecen las equivalencias geométricas de diferentes identidades algebraicas y una generalización del Teorema de Pitágoras.	La utilización de objetos matemáticos geométricos, la manipulación de los mismos. La manipulación y noción de objetos que se pueden abordar en un espacio de 2D y 3D como es el caso de la circunferencia y de las rectas que es lo que se basó la solución de nuestro problema de la esfera.	Euclides genera sus procedimientos en figuras planas (2D). Aunque las representaciones utilizadas en el abordaje del problema de la esfera son en 2D, estos nos remiten a un contexto 3D. En el caso del establecimiento del volumen de la esfera, nos remitimos a lo planteado por Arquímedes, quien para este descubrimiento, establece una demostración en un contexto real. Euclides basa sus demostraciones en un pensamiento intuitivo. La solución de la situación de la esfera, requiere un análisis y tratamiento	En el abordaje del problema de la esfera, es necesario un conocimiento de la composición de figuras en el espacio (3D) que se abordan representándolas en un plano (2D).Mientras que en el libro II de los elementos de Euclides se trabaja con figuras y nociones de 2D, pero no se hace necesario y no muestra trabajo o nociones de 3D. El lenguaje utilizado en la situación de la esfera.	En el libro II de Euclides se demuestran identidades algebraicas mediante un objeto geométrico y la respuesta se presenta con el mismo objeto. Mientras que en el problema de la esfera los objetos matemáticos se transforman en otros objetos matemáticos, por ejemplo se pasa de identidades algebraicas a secciones cónicas que la intersección entre dos de ellas es la solución de nuestro problema de la esfera.

Este grupo logra focalizar dos aspectos que nos parecen relevantes respecto al conocimiento que se quiere desarrollar: el primero está relacionado con la interpretación del problema desde el 2D y sus implicaciones al relacionar la interpretación con el 3D; para ello, recurren a los trabajos de Arquímedes, en esencia encuentran la posibilidad de usar este tipo de heurísticas. El otro aspecto que configuran es la interpretación de las expresiones algebraicas como identidad y como curvas, asunto que permite mostrar usos diferentes de las expresiones que relacionan las magnitudes de un problema.

Análisis respecto al SCK

La intención con esta pregunta es desarrollar actividades de descubrimiento y explicación, como lo presentamos en la figura 18. Respecto a estas intenciones, podemos inferir los siguientes asuntos.

Para la actividad de descubrimiento

- Durante el desarrollo de la experiencia, un buen porcentaje de estudiantes lograron identificar diferencias respecto al significado de las expresiones matemáticas que se trabajan alrededor del libro dos de *Elementos* de Euclides y las expresiones que usaron para solucionar el problema de la esfera en el curso de Problemas del Álgebra Geométrica. En especial, identificaron que el procedimiento, en el caso del problema, implica el rompimiento de la homogeneidad euclideana, esta expresión matemática relaciona magnitudes.

  Este aspecto les permite inferir que en el caso de las interpretaciones de pensamiento algebraico en Euclides, estudiado en el curso, la expresión algebraica es una identidad, pero para el caso del problema, se obtiene una expresión que se puede representar por medio de una curva.

  Para nosotros, el reconocimiento epistemológico por parte de los estudiantes de estos dos aspectos permite que ellos identifiquen dos momentos diferentes del estudio del álgebra; cuestión que contradice la idea de álgebra como un cúmulo de reglas que permiten trabajar con identidades. Aunque los estudiantes durante su etapa escolar, tanto en la Universidad como en los años anteriores, trabajaron con este tipo de expresiones, no han reflexionado sobre las implicaciones de esas diferencias; creemos que estas distinciones permiten iniciar un proceso de reflexión sobre la enseñanza del álgebra.

Para la actividad de explicación

En relación con este tipo de actividad de la práctica matemática, debemos reconocer que solamente un grupo de estudiantes, identificó la relación que creemos más importante en el trabajo de Descartes, curva – ecuación y que por supuesto permite el desarrollo no solamente del álgebra y la geometría analítica, sino de una nueva matemática, en donde son la relaciones entre la representación de curvas a partir de un instrumento con la representación simbólica, la nueva forma de resolución de problemas geométricos.

Segundo Ítem

Para presentar las respuestas de los estudiantes al segundo ítem del instrumento y realizar los comentarios de estas elaboraciones que hacen referencia al pensamiento algebraico involucrado en la solución del problema, vamos a hacer uso de una tabla en donde se encuentran apartes de las conversaciones o presentaciones o del documento escrito presentado por los estudiantes.

Tabla 13. Respuestas segundo ítem

Grupo	Fragmentos de respuesta	Comentarios
1	"[…] la similitud es que desarrollan pensamiento algebraico, aunque es diferente, en Euclides se generalizan procedimientos para resolver ecuaciones cuadráticas en la esfera hay un procedimiento para resolver problemas a partir de gráficas cartesianas y ecuaciones […]". "En ambos casos hay un proceso de generalización de tal forma que se puede construir una imagen de la representación algebraica antes de iniciar la representación simbólica".	Este grupo de estudiantes, que se basaron en la idea de pensamiento algebraico a partir de la generalización, abordan esta característica como la base de comparación; asumen una comparación de procedimientos como pensamiento algebraico. De igual manera, reconocen que el pensamiento algebraico requiere un juego de representaciones entre una mediación icónica o gráfica y la construcción de la expresión simbólica que permite resolver el problema geométrico.
2	"Nosotros vemos que en el caso del problema de la esfera se llevó a cabo un razonamiento más algebraico que conlleva uno geométrico (construcción de la parábola y la hipérbola. En el libro II se trata el álgebra geométrica, el cual parte de un proceso meramente geométrico que conlleva uno algebraico […]". "Observamos dos formas de razonar diferentes: una para las equivalencias de ecuaciones cuadráticas y otra para la resolución de problemas con curvas […]".	Se observa que estos estudiantes encuentran en los métodos dos formas de razonar diferentes; al parecer, el proceso de construcción de la ecuación que presenta el problema de la esfera les parece más algebraico y menos geométrico; esto puede ser porque en este proceso se nombran y relacionan los aspectos conocidos y desconocidos. Sin embargo, los estudiantes reconocen pensamiento algebraico en los dos casos y lo diferencian por el tipo de significado que le dan a la expresión: para uno, equivalencias y para el otro, curvas.
3	"[…] es muy diferente en las proposiciones de Euclides del libro II se evidencia una igualdad, álgebra. En el procedimiento del problema de la esfera se relacionan muchas cosas, va más allá, de pronto cálculo, porque hay variables […]".	En este persistió la idea de que el álgebra consiste en la resolución de equivalencias; de hecho, no identifican el proceso llevado para la solución del problema de la esfera como conocimiento algebraico, pues para este grupo, esa denominación es posible si existe la equivalencia de los lados de la igualdad al estilo euclideano.

4	"No hallamos similitudes entre el uno y el otro, en Euclides hay conservación del área, el pensamiento algebraico es como el del problema de la esfera, hay que resolver una ecuación para llegar a la solución [...]".	En este caso, los estudiantes manifiestan una posición que no se esperaba dado el trabajo que se realizó respecto a las proposiciones del libro dos y el material propuesto por Dienes (1970). Sin embargo, los estudiantes relacionan el pensamiento algebraico con la resolución de ecuaciones, no como equivalencias, sino para la resolución de un problema.
5	Para resolver la situación de la esfera, nos situamos en 3 momentos claves: 1) Contextualización de la situación: se estableció una representación gráfica de la situación para tener una percepción visual de los factores que intervienen en el problema, para ello, fue necesario hacer conciencia sobre la utilización de la geometría en el algebra para obtener una introducción al álgebra a través de la geometría y a la vez una alternativa didáctica que logre en un primer momento fortalecer el paso del a un lenguaje algebraico. 2) Descripción algebraica de la situación: Se establecen las equivalencias geométricas de diferentes identidades algebraicas presentes en la situación. 3) Generalización de la situación en un contexto algorítmico: se establecen las ecuaciones y procedimientos para solucionar la situación sin remitirse a una representación gráfica. En el libro II de los elementos de Euclides: Se ve un pensamiento geométrico algebraico o algebra geométrica[2] al demostrar de una manera generalizada una igualdad entre diferentes descomposiciones entre cuadrados (o productos notables). En el libro II de Euclides se trabaja algebra geométrica desde un pensamiento netamente geométrico, mientras que en el desarrollo del problema de la esfera se trabajan algoritmos (representaciones de números), se trabajan ecuaciones y generalizaciones numéricas, se rabaja un tipo de algebra simbolica. El uso de la letra se ve evidenciado en el desarrollo del problema de la esfera al hallar una incógnita para saber por dónde trazar la perpendicular al diámetro.	Este grupo intenta una descripción del método llevado a cabo para la solución del problema de la esfera, en esta llama la atención la importancia que le dan al establecimiento de equivalencias entre aspectos geométricos que pueden ser descritas a partir del álgebra. De igual manera, establecen un mayor valor epistemológico a la representación simbólica que a la gráfica. En los fragmentos se puede observar que parte de la respuesta está direccionada por el papel que le otorgan a la simbolización, comprendiendo que el tratamiento de esta representación permite la solución del problema.

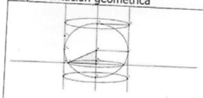
Análisis respecto al SCK

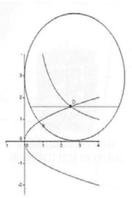
La posibilidad de que el futuro profesor de matemáticas identifique diferencias entre los dos modelos, el euclideano y el que deducimos de la obra de Descartes, permite que los estudiantes se cuestionen sobre el álgebra que se pone en juego en la escuela. De hecho, el grupo tres no reconoce el proceso de establecer una expresión simbólica en donde se relacionen datos conocidos y desconocidos en una expresión matemática, como parte del razonamiento matemático; estos estudiantes permanecen arraigados a la idea de álgebra en términos de procedimientos con letras que permiten transformar una expresión matemática en otra. Los estudiantes, en su mayoría, lograron construir un discurso sobre las diferencias de este tipo de pensamiento y asumieron posiciones respecto al álgebra, lo que les permite visualizar otro tipo de uso para este pensamiento.

Tercer ítem

A continuación se presentan los aspectos relacionados con la respuesta al ítem tres:

Tabla 14. Respuestas tercer ítem

Grupo	Fragmentos de respuesta	Análisis
1	Desde este punto de vista, se pretende entonces decir que la matemáticas tiene diversas representaciones que surgen al cabo de diferentes situaciones, esto es lo que permiten la modelación de la misma desde diferentes ámbitos y contextos. Según Planchart (2005) la modelación es una alternativa para integrar distintas representaciones de situaciones en las que se busca mejorar la enseñanza. *"La modelación se relaciona con sistemas de representaciones integra: símbolos, signos, figuras, gráficas y construcciones geométricas." (s. p.)* O lo que en términos más sencillos según Gravina, Búrigo, Basso & García (2011) se definiría como una representación en el lenguaje de la matemática de ciertos aspectos de un fenómeno. Sin embargo tal como lo plantea Duval (2001, citado por Rojas, 2012, p. 2) se entiende que las representaciones jamás pueden ser considerada y analizadas sin hacer referencia al sistema a través del cual fue producida. En el ámbito de la modelación, vemos que distintas formas de ver una situación,- no necesariamente problemica-, nos lleva a considerar muchos caminos bajo la cual adentrarnos a ella (un caso que trae nuevamente las dos hipótesis planteadas, de las cuales surgen primero modelos geométricos, y modelos que dan esa relación algebro geométrica, en la que se quiere llegar a garantizar desde otras miradas los procesos realizados).	En el análisis de representaciones, los estudiantes revisaron literatura correspondiente al tema con el fin de sentar una posición al respecto. Este grupo localiza el problema de las representaciones a partir de la modelación y desde allí identifica modelos con los cuales representar. La respuesta de este grupo se acerca más al análisis del método; sin embargo, es relevante que encuentren conexiones entre las representaciones que usan.
2	"[…] nosotros estamos de acuerdo con la frase que propuso el profesor, hay que trabajar con varias representaciones, queda claro que las representaciones no son los objetos y que para resolver la situación necesitamos varias de ellas, la que mejor nos sirva […] por ejemplo, la construcción en Geogebra para hallar las raíces de la ecuación cúbica que algebraicamente no pudimos resolver".	Este grupo manifiesta la diferencia entre el objeto y sus representaciones, este hecho revela un entendimiento de la naturaleza del problema que se complementa con la importancia que encuentran en la representación gráfica y el hecho de entender que allí pueden ver las raíces de una ecuación desconocida.
3	En el desarrollo del problema de las esfera podemos analizar después de a ver mirado las diferencias y similitudes abordas anteriormente que en Euclides el objeto matemático y sus representaciones siempre van a recaer en la misma geométrica; en Arquímedes el objeto matemático surge diferentes transformaciones respecto a su representación pasa de la representación algebraica y geométrica. Representación geométrica:  Representación Algebraica: V (Casquete menor) = $\frac{\pi}{3}h^2(3r-h)$ V (Casquete menor) = $\frac{\pi}{3}(\frac{\sqrt{2}}{4})^2(3(\sqrt{\frac{7}{8}})-(\frac{\sqrt{2}}{4}))$ V (Casquete menor) = $\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{8}\right)\left(3\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)$ V (Casquete menor) = $\frac{\pi}{24}\left(3\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)$ Podemos observar que las representaciones utilizadas fueron las representaciones geométricas y algebraicas ,nosotros pensamos que es necesario la relación entre estas dos representaciones ya que por medio de lo visual podemos establecer las relaciones entre los segmentos; esto nos puede permitir encontrar el punto de corte es útil pero no necesariamente tiene que ser utilizada la geometría, si se tiene el conocimiento de los objetos matemáticos que intervienen en este problemas no sería necesaria la representación gráfica.	Se ilustran dos tipos de representaciones: la geométrica y la algebraica; en este sentido, encuentran la necesidad de establecer una relación entre ellas, que podría ser gráfica cartesiana y útil para encontrar la raíz de la ecuación. Este grupo de estudiantes encuentran la tríada objeto de estudio en Descartes: problema geométrico, gráfico, representación simbólica.

4	• La ecuación cubica a la cual llegamos con el desarrollo del problema de la esfera la podemos representar con una parábola y una hipérbola, la intersección entre estas nos dan las soluciones de la ecuación cubica inicial, esto nos da soporte para decir que el objeto matemático de la ecuación, la podemos representar en diferentes tipos de ecuación lo que implica diferentes representaciones de este objeto matemático. • Al tratar de abordar el problema de la esfera nos encontramos con varios objetos matemáticos como razón, figuras geométricas, ecuación , formulas matemáticas y algunos hallazgos en la historia de las matemáticas (Arquímedes con la relación de la esfera y el cilindro), entre otras, esto nos da pie para decir que trabajamos con diferentes tipos de objetos matemáticos, sino tuviéramos en cuenta estas cosas, no podríamos resolver el problema de la esfera, es decir deben haber objetos matemáticos o por lo menos la representación de ellos o el estudio de ellos para el desarrollo del problema mencionado. • Podríamos terminar diciendo que es necesario trabajar con objetos matemáticos y con sus diferentes representaciones para la solución del problema de la esfera, aunque no necesariamente con las DIFERENTES REPRESENTACIONES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS, es decir podemos trabajar con una o unas cuantas representaciones de los objetos matemáticos, por ejemplo la solución de la ecuación cubica se puede representar por medio de parábola e hipérbola, que fue lo que se hizo en nuestro trabajo, pero también se podía resolver por medio de otras representaciones como derivada, es decir resolver la ecuación cubica derivando.	La conclusión de estos estudiantes hace referencia a la posibilidad de trabajo respecto a diferentes representaciones de objetos diferentes que se encadenan para lograr resolver el problema. De igual manera, vinculan las representaciones con los objetos matemáticos, aspecto que consideramos favorable en la construcción de aspectos relacionados con el conocimiento didáctico del contenido.
5	"Al realizar el procedimiento algebraico, llegamos a una ecuación cúbica, la cual se podía expresar como una hipérbola, la cual, al graficar su intersección, nos daría el punto por donde debía cortar el plano la esfera, esto de la siguiente manera:  Ecuación utilizada: $h(br\pi + ar\pi) - h^2\left(\frac{b\pi - a\pi}{3}\right) = \frac{-4b\pi r^3}{3h}$ Donde la primera parte representa la parábola y la segunda parte la hipérbola *Sobre la afirmación "La solución del problema de la esfera, implica el trabajo con diferentes representaciones de los objetos matemáticos" planteamos que* para nosotros esta afirmación es verdadera dándole veracidad con ayuda de los lineamientos curriculares de matemáticas, los cuales dicen que "*únicamente tienen existencia real aquellos objetos matemáticos que pueden ser construidos por procedimientos*". A partir de ésto, decimos que nuestro recurso esencial para solucionar el problema de la esfera fueron las construcciones geométricas, y que para llegar a ésta debimos utilizar un proceso (algoritmo o procedimiento) lo que nos lleva a decir que es un objeto matemático a partir de los procesamientos realizados y por ende una representación de estos objetos desde lo geométrico.	Este grupo de estudiantes trabajan en relación con la resolución del problema a partir de la cúbica y su relación con las cónicas; respecto a las representaciones que se ponen en juego desde lo geométrico y lo algebraico; la consideración que realizan incluye una relación entre objeto matemático y representaciones. Vale la pena resaltar la fuente de información que usan los estudiantes, los lineamientos curriculares para el área de matemáticas; este hecho permite ver la importancia de estas reflexiones en el entendimiento de un documento básico para el profesor de matemáticas como el citado.

Análisis respecto al SCK

La tercera pregunta del instrumento llevó a los estudiantes a la reflexión que creemos ha sido más fuerte: el asunto de las representaciones en matemáticas y sus posibilidades en la resolución de un problema matemático. La gran mayoría de ellos lograron encontrar una relación que no estaba considerada al pensar el instrumento, la dupla objeto-representaciones; sin embargo, este hecho se convierte en significativo, pues los estudiantes reconocen que los objetos matemáticos tienen varias representaciones y, por lo tanto, el objeto no es una de ellas, asunto que creemos tendrán en cuenta al formular propuestas de innovación y aula.

Es visible que reconocen relaciones entre diferentes tipos de representaciones, sobre todo la algebraica-geométrica, asunto que puede ir definiendo aspectos relacionados con la didáctica de la matemática. En general, los estudiantes lograron encontrar las relaciones que nos proponíamos, reflexión que permite iniciar el camino de la didáctica del álgebra en relación con el análisis de curvas y los procedimientos para resolver problemas geométricos.

Capítulo 6. Epílogo

Para el desarrollo de esta sección, vamos a considerar dos apartados: uno respecto a la relación de la historia de las matemáticas en la formación de profesores y otro sobre aspectos que creemos quedan abiertos para futuros trabajos.

La historia de la matemática en la formación de profesores

Las consideraciones que se realizaron en este trabajo nos permiten indicar que la interpretación de la historia a partir de la idea de prácticas matemáticas facilita un abordaje que sobrepasa las miradas de una historia epistemológica para la formación de profesores. Abre un espacio de investigación propio de los formadores de futuros profesores de matemáticas; en este sentido, la obra de Descartes propone aspectos relacionados con la formación de un pensamiento matemático moderno que son fuertemente utilizables en la conformación de reflexiones didácticas y que se podrían movilizar al pensamiento didáctico del contenido matemático de los futuros profesores.

En la literatura, filosofía, historia y epistemología de la matemática existen trabajos que serían importantes en términos de hacer la interpretación de los momentos y acontecimientos históricos en relación con la formación del profesor de matemáticas; en este caso, la obra de Bos (2001) es un documento que marca la línea histórica de la obra de Descartes; sin embargo, es necesario que los formadores se acerquen a las obras a partir de procesos sistematizados; en esto, creemos que la técnica de análisis de contenido cualitativa tiene varias bondades: permite estudiar el texto a partir de categorías, encontrar asuntos que se encuentran ocultos en la obra y establecer conexiones globales y puntuales de documentos históricos.

En cuanto a la experiencia con los estudiantes, debemos indicar que ellos usan muchos aspectos de la matemática, como, por ejemplo, representaciones simbólicas y gráficas de situaciones, sin reflexionar sobre los significados epistemológicos y ontológicos de los objetos matemáticos que están en juego en la solución de un problema. Creemos que parte de las reflexiones que debe hacer el estudiante están relacionadas con la posibilidad de revisar el porqué y para qué usan las matemáticas; preguntas sobre su propia formación y el papel de los objetos que involucran en sus soluciones parecen desarrollar reflexiones propias de la didáctica y, suponemos, podrían movilizar su práctica como profesores.

Los aspectos que lograron configurarse para esta experiencia muestran que esta mirada de la historia permite vislumbrar asuntos que aunque se usan y son comunes a los profesores de matemáticas y a otros usuarios de conocimiento matemático, en general, no son estipulados en los currículos de formación de profesores, tal es el caso de la noción de curva y el procedimiento de solución de problemas.

Vemos que la interpretación de la historia desde las prácticas permite develar estos asuntos, que pueden estar relacionados con aspectos de las visiones cognitivas de la Educación Matemática. Algunos otros aspectos, creemos, pueden ser abordados desde visiones socioculturales, pues la idea de prácticas pone en juego relaciones sobre lo que se espera de las matemáticas socialmente y la no neutralidad que se evidencia en la historia respecto al conocimiento matemático, su validez, rigor, necesidades y conflictos.

En el caso de la instrumentalización, a partir de la experiencia es visible que programas como Geogebra se convierten en herramientas que tienen el mismo objeto que los compases en la Antigüedad, con la diferencia de que el programa permite que no sean solo diseños o aspectos abstractos, sino que es posible construir las curvas a partir de las creaciones mécanicas; este aspecto, que tendría que ser abordado en otra investigación, lleva a pensar en la necesidad de algún tipo de instrumentalización en la resolución de problemas geométricos. De igual manera, el uso de estos sistemas de información permite que los estudiantes realicen conjenturas sobre los problemas y reflexionen sobre el trabajo con representaciones.

Algunos aspectos a trabajar

En este trabajo surgen más cuestionamientos que conclusiones, hoy que se pone en tela de juicio, en los documentos internacionales de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Unesco) y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), la formación de profesores y, en esencia, la capacidad que tienen de desarrollar nuevas propuestas de innovación en educación.

Los educadores de las futuras generaciones de profesores tenemos la obligación de pensar en nuevas formas de desarrollar los currículos; en esencia, la dificultad radica en el desarrollo del conocimiento didáctico del contenido, pues, tal como se define en este documento, es una combinación de la disciplina, en nuestro caso las matemáticas, con la didáctica específica. Este aspecto está abierto y, como se dijo en la introducción, este es un intento de uso de la historia, una sola arista desde donde se puede asumir el problema de esta manera; quedan por hacer diferentes intervenciones de aula, que permitan identificar aspectos importantes en la formación del profesor de matemáticas.

La visión del desarrollo de las prácticas matemáticas que permitieron la constitución de un objeto o teoría matemática, como se mostró durante el documento, es un asunto que está siendo estudiado por filósofos e historiadores de las matemáticas. Se necesita una comunidad en Educación Matemática que tome estos estudios e interprete y estudie la importancia de tomar una filosofía naturalista de las matemáticas para la formación de profesores de matemáticas, que encuentre sus ventajas, desventajas y, sobre todo, las posibilidades de trabajo real con los estudiantes.

Finalmente, nos queda la tarea de revisar los componentes definidos para el conocimiento didáctico del contenido, en especial los que hacen referencia al conocimiento matemático especializado, e intentar configurar los asuntos que desde la historia de la matemática se posibilitan para su desarrollo. Este hecho permitiría el desarrollo de documentos históricos construidos para el uso exclusivo del profesor de matemáticas, hay que levantar una historia de las matemáticas para los profesores de matemáticas, que permita pasar del relato histórico al estudio de acontecimientos y prácticas de constitución de objetos matemáticos.

Referencias

Arboleda, L. C. (2011). Los estudios históricos en educación matemática desde la perspectiva de la práctica docente. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Brasil 26 al 30 de junio. Memorias del evento*. Recuperado de http://lematec.net/CDS/XIIICIAEM/artigos/MP1-arboleda.pdf

Arboleda Aparicio, L. C. (2012). La formación de educadores en ciencias en el contexto de la investigación en el aula. En A. Zambrano y C. Uribe (Eds.), *Los estudios históricos en educación matemática desde la perspectiva de la práctica docente* (pp. 1-5). Santiago de Cali: Editorial Asociación Colombiana para la Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología.

Artmann, B. (1999). *Euclid-the creation of mathematics*. New York: Springer.

Azzouni, J. (2007). How and why mathematics is unique as a social practice. En B. V. Kerkhove y J. P. Bendegem (Eds.), *Perspectives on mathematics practice. Bringing together philosophy of mathematics, sociology of mathematics, and mathematics education* (pp. 3-24). New York: Springer.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 389-409.

Bashmakova, I. y Smirnova , G. (2000). *The beginnings and evolution of algebra*. United States of America : The Mathematical Association of America.

Blomeke, S., Feng, J. H., Kaiser, G. y Schmidt, W. (2014). *International perspectives on teacher knowledge, beliefs and opportunities to learn*. New York: Springer.

Bolivar, A. (2005). *Conocimiento didáctico de contenido y didácticas específicas*. Recuperado el 20 de febrero de http://www.ugr.es/local/recfpro/Rev92ART6.pdf

Bos, H. (s. f.). *La structure de La Géométrie de Descartes*. Recuperado el 1 de enero de 2013 de http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0151-4105_1998_num_51_2_1324

Bos, H. (1981). On the representation of curves in Descartes' géométrie. *Archive for History of Exact Sciences, 24*(4), 295-338.

Bos, H. (1988). La structure de *La Géométrie* de Descartes. *Revue D'histoire des Sciences*, 291-318.

Bos, H. (2001). *Redefining geometrical exactness : Descartes transformation of the early modern concept of construction*. New York: Springer.

Butto, C. Rojano, T. Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. Educación Matemática [en linea] 2004, 16 (abril) : [Fecha de consulta: 15 de mayo de 2013] Disponible en:<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516105> ISSN 1665-5826

Cáceres, P. (2003). Análisis cualitativo de contenido: una alternativa metodológica alcanzable. *Psicoperspectivas*, 53-82.

Clemens, M., Bishop, A., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Leung, F. (Eds.). (2013). *Third international handbook education mathematics*. New York: Springer.

Dennis, D. (1997). René Descartes' curve-drawing devices: Experiments in the relations between mechanical. *Mathematics Magazine, 70*(3), 163-174.

Descartes, R. (1996). *Discurso del método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría* (J. M. Sánchez Ron, Ed., y G. Quintás, Trans.). Barcelona: Círculo de Lectores.

Dienes, Z. P. (1970). *La construcción de las matemáticas*. Madrid: Vicens-Vives.

Fauvel, J. y Maanen, J. V. (2002). *History in mathematics education. The ICME study.* New York: Kluwer Academic Publishers.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach.* New York: Springer.

Foucault, M. (1996). *La verdad y las formas jurídicas*. Barcelona: Gedisa.

Gess-Newsome, J. (2002). Pedagogical content knowledge: An introduction and orientation. En J. Gess-Newsome y N. Lederman, *Examining pedagogical content knowledge: The construct and its implications for science education* (pp. 3-20). New York: Kluwer Academic Publishers.

Giaquinto, M. (2005). Mathematical activity. En P. Mancosu, K. F. Jorgensen y S. A. Perdersen, *Visualization, explanation and reasoning explanationand reasoning Styles* (pp. 75-87). Países Bajos: Springer.

Glas, E. (2007). Mathematics as objective knowledge and as human practice. En B. Kerkhove y J. Bendegem (Eds.), *Perspectives on mathematical practices* (pp. 25-42). New York: Springer.

Godino J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22*(2/3), 237-284.

González Urbaneja, P. M. (2004). *La Geometría de Descartes*. Recuperado el 17 de mayo de 2010 de www.xtec.es/sgfp/llicencies/200304/.../geometriadescartes.pdf

Grattan Guinness , I. (1996). Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid's elements: How did he handle them? *Historia Mathematica*, 355-375.

Guacaneme Suárez, E. A. (2011). La historia de la matemática en la formación de un profesor: razones e intenciones (pp. 1-11). *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recife: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Guacaneme, E. (2010). II Congreso Nacional de Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología. *¿Qué tipo de historia de las matemáticas debe ser apropiada por un profesor?* (pp. 1-11). Bogotá: s. e.

Heath, T. (1896). *Apollonius of Perga. Treatise on conic sections*. Cambridge: s. e.

Heath, T. (1897). *The works of archimedes*. London: Cambridge University.

Jablonka, E. Wagner, D. y Walshaw, M. (2013) Theories for Studying Social, Political and Cultural Dimensions of Mathematics Education. En M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 41-68). New York: Springer.

Leung, F. (2013). Technology in the Mathematics Curriculum. En M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 517-524). New York: Springer.

Malisani, E. D. (2003). *Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico*. Recuperado el 20 de enero de 2013 de http://math.unipa.it/~grim/AlgebraMalisaniSp.pdf

Mehrtens, H., Bos, H. y Schneider, I. (1981). *Social history of nineteenth century mathematics*. Boston: Springer.

Molland, A. (1976). Shifting the foundations: Descartes's transformation of ancient geometry. *Historia de Mathematica*, *3*(1), 21-49.

Navarro, P. y Díaz, C. (1994). Análisis de contenido. En J. M. Delgado y J. Gutiérrez, *Métodos y técnicas cualitativas de investigación en ciencias sociales* (pp. 177-221). Madrid: Sisntesis Psicologia.

Paty, M. (1997). Memorias del Seminario en Conmemoración de los 400 Años del Nacimiento de René Descartes. *Mathesis Universalis e Inteligibilidad en Descartes*) (pp. 135-170). Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Peressini , A. y Peressini, D. (2007). Philosophy of mathematics and mathematics education. En B. Kerkhove y J. Bendegem (Eds.), *Perspective on mathematics* *practices. Bringing together philosophy of mathematics, sociology of mathematics, and mathematics education* (pp. 175-190). New York: Springer.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, *5*(4), 129-145.

Schubring, G. (2002). History of mathematics for trainee teachers. En J. Fauvel y J. Maanen (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 91-142). New York: Kluwer Academic Publishers.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra*. Argentina: Libros del Zoezal.

Shapin, S. y Schaffer, S. (1985). *Leviathan and the Air- Pump. Hobbes, Boyle, and the experimental life*. Princeton: Princeton University Press.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 2*(9), 24-39.

Tabak, J. (2004). *Algebra: Sets, symbols, and the language of thought.* New York: Facts on File.

Torres, L. A. y Guacaneme, E. (2012). *La Historia de la matemática en algunos programas colombianos*. Reporte de Investigación, Universidad del Valle, Cali.

Trouche, L. Drijvers, P. Gueudet, G. y Sacristán, A. (2013). *Technology-driven developments and policy implications for mathematics education*. En: M. Clements, M., A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 753-790). New York: Springer.

Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (2000). *Documento de acreditación previa. Licenciatura en Educación Básica con Enfasis en Matemáticas*. Bogota, documento inédito.

Van der Waerden, B. (1985). *A history of algebra from al-khwärizml to emmy noether.* New York: Springer.

Zaslavsky, O. y Sullivan, P. (2011). *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics. Tasks to enhance prospective and practicing teacher learning.* New York: Springer.

Autores

Jhon Helver Bello Chávez

Licenciado en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Magister en Docencia de la Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación, sede Universidad del Valle. Sus preocupaciones investigativas están relacionadas con las posibilidades de conexión entre la historia de las matemáticas y la formación de profesores de matemáticas.

Alberto Forero Poveda

Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Magister en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. Sus trabajos de investigación giran en torno a dos campos de formación, Matemáticas, en Sistemas Dinámicos y Educación Matemática, en la relación Historia de la Matemática - Educación Matemática. Desempeña su labor docente en el desarrollo de pensamiento matemático en futuros profesores de matemáticas.

Este libro se
terminó de imprimir
en marzo del 2016
en la Editorial UD
Bogotá, Colombia